

대칭 3-정규 유향 그래프의 해밀톤 분할 및 그 응용*

박 정흠¹, 김 희철²

¹가톨릭대학교 컴퓨터공학부
420-743 경기도 부천시 원미구 역곡 2동 산 43-1
jhpark@tcs.cuk.ac.kr
전화 (032) 650-3366, 팩스 (032) 650-3772

²한국외국어대학교 컴퓨터공학과
449-791 경기도 용인군 모현면 왕산리 산 89
hckim@maincc.hufs.ac.kr
전화 (0335) 30-4267, 팩스 (0335) 33-1696

Hamiltonian Decomposition of Symmetric 3-Regular Digraphs and its Application

Jung-Heum Park¹ and Hee-Chul Kim²

¹Division of Computer Science and Engineering
Catholic University of Korea
Yokkok 2-dong 43-1, Wonmi-gu, Puchon City, Kyonggi-do 420-743
jhpark@tcs.cuk.ac.kr
TEL (032) 650-3366, FAX (032) 650-3772

²Department of Computer Science and Engineering
Hankuk University of Foreign Studies
Wangsan-ri 89, Mohyun-myun, Yongin-gun, Kyonggi-do 449-791
hckim@maincc.hufs.ac.kr
TEL (0335) 30-4267, FAX (0335) 33-1696

* 이 논문은 가톨릭대학교 교비연구비에 의하여 연구되었음.

대칭 3-정규 유향 그래프의 해밀톤 분할 및 그 응용

Hamiltonian Decomposition of Symmetric 3-Regular Digraphs and its Application

요약

분지수가 d 이고 대칭인 유향 그래프를 에지가 서로 다른 d 개의 유향 해밀톤 사이클로 분할할 수 있는가 하는 해밀톤 분할 문제를 고려한다. 여기서 유향 그래프가 대칭이라는 것은 $\langle v, w \rangle$ 가 에지이면 $\langle w, v \rangle$ 도 에지가 되는 그래프를 말한다. 대칭 3-정규 유향 그래프 G 가 해밀톤 분할이 가능하면 이분 그래프임을 보인다. 또한 양의 정수 k 에 대해서 정점의 개수가 $4k$ 이면 G 는 해밀톤 분할이 불가능하고 정점의 수가 $4k+2$ 이면 해밀톤 분할이 가능한 유향 그래프가 존재함을 보인다. 이 결과의 응용으로 분지수가 3인 다중 컴퓨터의 위상인 CCC, 코달 링, $C_m \oplus C_m$ 의 해밀톤 분할 가능성을 살펴본다.

Abstract

We consider the hamiltonian decomposition problem of partitioning a symmetric d -regular digraph into d edge-disjoint hamiltonian cycles. A digraph is called symmetric if $\langle v, w \rangle$ is an edge of the digraph then $\langle w, v \rangle$ is also an edge of the digraph. We show that a symmetric 3-regular digraph G with hamiltonian decomposition is necessarily bipartite. We also show that G is not hamiltonian decomposable if G has $4k$ vertices for every positive integer k , and that there is a symmetric 3-regular digraph with $4k+2$ vertices which is hamiltonian decomposable. With an application of these results, we investigate hamiltonian decomposability of multicomputer network topologies with degree three such as CCC, chordal ring, and $C_m \oplus C_m$.

1 서론

유향 그래프의 해밀톤 분할 문제라는 것은 내향 분지수와 외향 분지수가 모두 d 인 정규 유향 그래프가 주어져 있을 때, 이 그래프의 에지들을 d 개의 에지가 서로 다른 유향 해밀톤 사이클로 분할이 가능한가 하는 문제이다. 유향 그래프가 해밀톤 분할이 가능하기 위해서는 강연결되어 있어야 하지만 강연결되어 있다는 것만으로는 충분하지 않다.

이 문제와 관련하여 완전 유향 그래프나 완전 이분 유향 그래프가 해밀톤 분할이 가능한 조건이 발표되었고, 대부분의 연구 결과는 해밀톤 분할이 가능할 충분 조건에 관한 것이다[3,4]. 그리고 완전 이분 그래프의 에지에 방향을 주어 구성한 d -정규 유향 그래프의 해밀톤 분할 문제와 d -정규 토너먼트의 해밀톤 분할 문제는 미해결 문제로 알려져 있다.

해밀톤 분할 문제는 유향 그래프보다는 무향 그래프에서 더 많은 연구가 발표되어 있다[3,4]. 무향 그래프 G 의 해밀톤 분할 문제는 G 의 분지수가 $2d$ 이면 d 개의 에지가 서로 다른 해밀톤 사이클로 분할하고 분지수가 $2d+1$ 이면 d 개의 해밀톤 사이클과 1-팩터(factor)로 분할하는 것을 말한다.

분지수가 짝수인 무향 그래프 G 가 해밀톤 분할이 가능하다면, G 의 모든 에지 (v, w) 를 두 개의 유향 에지 $\langle v, w \rangle$ 와 $\langle w, v \rangle$ 로 대체하여 얻어진 유향 그래프 G' 도 해밀톤 분할이 가능하다. G 의 무향 해밀톤 사이클은 G' 에서 두개의 유향 해밀톤 사이클에 대응하기 때문이다. 그러나 분지수가 홀수인 경우는 이러한 방식으로 직접 G' 의 해밀톤 분할을 얻을 수 없다. 이 때 G' 은 모든 에지 $\langle v, w \rangle$ 에 대해서 $\langle w, v \rangle$ 도 G' 의 에지가 되는데 이러한 그래프를 대칭 유향 그래프라고 부른다.

대칭 유향 그래프의 해밀톤 분할은 워홀 라우팅 모델 하에서 방송이나 멀티캐스팅 등 다중 컴퓨터의 노드간에 신뢰성 있는 통신 알고리즘을 설계하는데 직접 사용될 수 있음이 알려져 있다[5,6]. 이 때 다중 컴퓨터의 위상에서 무향 에지를 방향이 서로 다른 두 개의 유향 에지라고 간주한다. 이와 같은 방식으로 하이퍼큐브, 토러스[5], 다차원 메쉬[6] 상에서의 통신 알고리즘이 설계되었다.

이 논문에서는 분지수가 3이고 대칭인 유향 그래프, 즉 대칭 3-정규 유향 그래프의 해밀톤 분할 문제를 고려한다. G 를 대칭 3-정규 유향 그래프라고 하고 n 을 G 의 정점의 개수라고 하자. G 가 대칭이고 분지수가 3이므로 n 은 반드시 짝수이어야 한다.

G 가 해밀톤 분할이 가능하기 위해서는 해밀톤 사이클을 가진 이분 그래프이어야 함을 밝힌다. 그리고 양의 정수 k 에 대해서 $n=4k$ 이면 G 는 해밀톤 분할이 불가능하고, $n=4k+2$ 이면 해밀톤 분할이 가능한 유향 그래프가 존재함을 보인다. 이 결과를 다중 컴퓨터의 위상으로 분지수가 3인 CCC(cube-connected-cycle)[7], 코달 링(chordal ring)[1],

$C_m \oplus C_m$ 에 적용하면 모든 CCC와 $C_m \oplus C_m$ 은 해밀톤 분할이 불가능하고 코달 링은 정점이 $4k$ 이면 해밀톤 분할이 불가능하고 $4k+2$ 이면 해밀톤 분할이 가능한 그래프가 있음을 보일 수 있다.

이 논문에서는 다중 에지가 없는 단순 그래프를 대상으로 한다. 다중 에지가 있는 3-정규 유향 그래프는 에지 연결도가 2 이하가 되어 해밀톤 분할이 불가능함을 쉽게 알 수 있다. 이후로 특별히 언급이 없으면 모든 사칙 연산은 모듈로 n 연산이다. 그리고 G 에서 유향 에지의 쌍 $\langle v, w \rangle$ 와 $\langle w, v \rangle$ 를 무향 에지와 같이 (v, w) 로 쓰기로 한다. 이 논문에서 정의하지 않은 그래프 이론적인 용어는 [2]를 따른다.

2 해밀톤 분할을 위한 필요 조건

G 를 해밀톤 분할이 가능한 대칭 3-정규 유향 그래프라고 하자. G 는 3개의 유향 해밀톤 사이클로 분할되는데 그 중 하나를 C 라고 하고 $C = v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_1, v_0$ 이라고 두자. G 에서 C 에 속한 에지를 제거한 그래프 $G-C$ 는 당연히 두 개의 유향 해밀톤 사이클 C_0, C_1 으로 분할 가능하다. $\langle v_i, v_{i+1} \rangle$ 을 $G-C$ 의 경계 에지라고 하고, (v_i, v_j) 를 $G-C$ 의 코드 에지라고 부르자(그림 1 참조). 이 때 $j \neq i \pm 1$ 이다. 코드 에지 (v_i, v_j) 의 크기는 $\min\{i-j, j-i\}$ 이라고 한다. 모듈로 n 연산임에 주의한다.

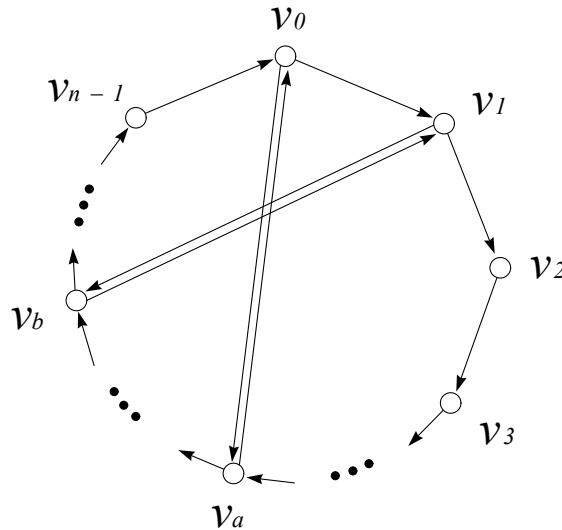


그림 1 $G-C$

에지가 서로 다른 $G-C$ 의 두 유향 해밀톤 사이클 C_0, C_1 의 성질을 아래 보조 정리에서 살펴보기로 한다. 에지 $\langle v_0, v_1 \rangle$ 을 지나는 유향 해밀톤 사이클을 C_0 라고 하자.

보조 정리 1 경계 에지 $\langle v_i, v_{i+1} \rangle$ 은 i 가 짝수이면 C_0 에 속하고 홀수이면 C_1 에 속한다.

증명 먼저 $\langle v_1, v_2 \rangle$ 는 C_0 에 속하지 않음을 보인다. 만약 그렇지 않다고 가정하면, v_1 에 인접한 두 유향 에지 $\langle v_1, v_b \rangle, \langle v_b, v_1 \rangle$ 은 모두 C_1 에 속해야 하지만 C_1 이 해밀톤 사이클이라는 사실에 모순된다. 이와 같은 방식으로 $\langle v_1, v_2 \rangle$ 가 C_1 에 속하므로 $\langle v_2, v_3 \rangle$ 는 C_0 에 속함을 보일 수 있다. 따라서 위의 사실이 성립함을 쉽게 알 수 있다. ■

보조 정리 2 C_0 를 따라가면 경계 에지와 코드 에지가 번갈아 나타난다. C_1 에 대해서도 마찬가지로 성립한다.

증명 C_0 는 $n/2$ 개의 경계 에지를 가지므로 나머지 $n/2$ 개는 모두 코드 에지이다. 그리고 보조 정리 1에 의해서 C_0 에 속한 어떤 두 경계 에지도 인접하지 않으므로 위의 사실을 알 수 있다. C_1 에 대해서도 마찬가지로 사실을 관찰할 수 있다. ■

G 가 해밀톤 분할이 가능하기 위해서는 당연히 해밀톤 사이클을 가지고 있어야 한다. 이 외에 위의 보조 정리를 이용하면 G 는 이분 그래피어야 함을 보일 수 있다. v_i 를 i 가 짝수이면 짝수 정점이라고 부르고 그렇지 않으면 홀수 정점이라고 부르자.

정리 1 G 는 해밀톤 사이클을 가진 이분 그래프이다.

증명 G 가 이분 그래프임을 보인다. C 에 속한 경계 에지는 모두 짝수 정점과 홀수 정점을 잇는다. 그리고 C_0 와 C_1 에 있는 경계 에지도 마찬가지이다. C_0 에 속한 코드 에지 $\langle v_1, v_b \rangle$ 를 생각해 보자. C_0 를 따라가면 보조 정리 2에 의해서 $\langle v_1, v_b \rangle$ 다음에는 경계 에지 $\langle v_b, v_{b+1} \rangle$ 이 나타나는데 이것이 C_0 에 속하므로 b 는 짝수 즉 v_b 는 짝수 정점이 된다. 같은 방식으로 C_0 의 모든 코드 에지 $\langle v_i, v_j \rangle$ 에 대해서 v_i 는 홀수 정점이고 v_j 는 짝수 정점임을 보일 수 있다. C_1 의 코드 에지는 C_0 의 코드 에지와 방향만 반대이므로 역시 홀수 정점과 짝수 정점을 잇는다. G 의 모든 에지는 짝수 정점과 홀수 정점 사이에 존재하므로 G 는 이분 그래프이다. ■

위의 정리 1에서 의하면 모든 에지는 짝수 정점과 홀수 정점 사이에 존재하므로 코드의 크기는 모두 홀수가 됨을 알 수 있다.

$G-C$ 에서 경계 에지를 제거하고 모든 코드 에지를 무향 에지로 간주하자. 그리고 모든 짝수 i 에 대해서 두 정점 $\{v_i, v_{i+1}\}$ 을 묶어서(contraction) 얻어지는 그래프를 G_0^C 라고

하고 홀수 j 에 대해서 $\{v_j, v_{j+1}\}$ 을 묶어서 얻은 그래프를 G_1^C 이라고 한다.

성질 1 G_0^C 와 G_1^C 은 길이가 $n/2$ 인 사이클로 이루어진 그래프이다.

증명 C_0 와 C_1 에서 경계 에지로 인접한 두 정점이 각각 G_0^C 와 G_1^C 의 한 정점에 대응하기 때문에 위 사실을 쉽게 알 수 있다. ■

위의 사실을 이용하면 대칭 3-정규 유향 그래프가 해밀톤 분할이 가능할 필요 충분 조건을 아래와 같이 얻을 수 있다. 그러나 이 조건을 이용하여 주어진 유향 그래프가 해밀톤 분할이 가능한지를 알아보는 것은 모든 유향 해밀톤 사이클을 생성하여야 하는 어려움이 있다. 증명은 자명하므로 생략하기로 한다.

성질 2 대칭 3-정규 유향 그래프 G 가 해밀톤 분할이 가능할 필요 충분 조건은 G 의 어떤 해밀톤 사이클 C 에 대해서 G_0^C 와 G_1^C 이 모두 길이가 $n/2$ 인 사이클을 이룬다는 것이다.

3 $n=4k$ 인 경우의 해밀톤 분할

G 를 대칭 3-정규 유향 그래프라고 하자. 이 절에서는 $n=4k$ 이면 G 는 해밀톤 분할이 불가능함을 보이고자 한다. 이를 증명하기 위하여 먼저 아래 보조 정리 3에서 G 가 해밀톤 분할이 가능하면 정점의 개수가 $n-4$ 이면서 해밀톤 분할이 가능한 대칭 3-정규 유향 그래프를 구성할 수 있음을 보인다. 그리고 전체적인 증명은 보조 정리 3과 함께 $n=4$ 일 때 해밀톤 분할이 불가능함을 보임으로써 모순을 유도하여 완성된다.

보조 정리 3 정점을 n 개 가지고 해밀톤 분할이 가능한 대칭 3-정규 유향 그래프가 존재하면, 정점이 $n-4$ 개이면서 해밀톤 분할이 가능한 그래프를 구성할 수 있다. 이 때 $n \geq 8$ 이다.

증명 G 를 해밀톤 분할하여 얻은 유향 해밀톤 사이클 하나를 C 라고 하고 $C = v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_1, v_0$ 라고 두자. 아래의 세 경우에 대해서 G 에서 정점을 4개 제거하여 해밀톤 분할 가능한 그래프 G' 을 생성하고자 한다.

경우 1 $G-C$ 에 크기가 3인 코드 에지가 존재하는 경우

그 코드 에지를 (v_{i+1}, v_{i+4}) 라고 하고 v_{i+2} 와 v_{i+3} 에 코드 에지로 인접한 정점을 각각 v'_{i+2} 와 v'_{i+3} 이라고 하자(그림 2 (a) 참조). 그림에 표시되어 있는 노드들 $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+5}, v'_{i+2}, v'_{i+3}\}$ 이 모두 서로 다른 경우부터 생각하기로 한다. 같은 정점

이 있는 경우는 코드의 크기가 홀수임을 생각하면 $v'_{i+2} = v_{i+5}$ 이거나 혹은 $v'_{i+3} = v_i$ 일 수 있으나 이 경우는 나중에 고려하기로 한다.

G 는 C 뿐만 아니라 에지가 서로 다른 두 개의 유향 해밀톤 사이클 C_0, C_1 을 가진다. $\langle v_j, v_{i+1} \rangle$ 과 $\langle v_{i+1}, v_{i+2} \rangle$ 는 보조 정리 1에 의해서 서로 다른 유향 해밀톤 사이클에 포함되므로 각각 $\langle v_j, v_{i+1} \rangle$ 과 $\langle v_{i+1}, v_{i+2} \rangle$ 를 지나는 유향 해밀톤 사이클을 C_0, C_1 이라고 하자. C_0 를 따라가면 보조 정리 2에 의하여 경계 에지와 코드 에지가 번갈아 나타나므로, $v_j, v_{i+1}, v_{i+4}, v_{i+5}$ 를 순서로 지나며 $v'_{i+2}, v_{i+2}, v_{i+3}, v'_{i+3}$ 을 지나게 된다. C_0 상에서 v_{i+5} 에서 v'_{i+2} 까지의 경로를 $P_{1,1}$ 이라고 하고 v'_{i+3} 에서 v_i 까지의 경로를 $P_{1,2}$ 라고 두면 C_0 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_0 = v_j, v_{i+1}, v_{i+4}, v_{i+5}, P_{1,1}, v'_{i+2}, v_{i+2}, v_{i+3}, v'_{i+3}, P_{1,2}$$

C_1 에 대해서도 마찬가지로 다음과 같이 나타낼 수 있다. $P_{1,3}$ 는 C_1 상에서 v'_{i+2} 에서 v'_{i+3} 까지의 경로이다.

$$C_1 = v'_{i+3}, v_{i+3}, v_{i+4}, v_{i+1}, v_{i+2}, v'_{i+2}, P_{1,3}$$

G 에서 4개의 정점들 $\{v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}\}$ 와 이들 정점에 인접한 에지를 모두 제거하고 경계 에지 $\langle v_j, v_{i+5} \rangle, \langle v_{i+5}, v_i \rangle$ 와 코드 에지 (v'_{i+2}, v'_{i+3}) 을 첨가하여 G' 을 생성한다. G' 은 $n-4$ 개의 정점을 가진다. 먼저 G' 이 단순 그래프임을 보이려고 한다. G 는 단순 그래프임에 주의한다. G' 이 단순 그래프가 아니라면 아래의 조건을 만족한다.

- (i) (v_j, v_{i+5}) 가 $G-C$ 의 코드 에지이거나, 혹은
- (ii) $\langle v'_{i+2}, v'_{i+3} \rangle$ 이나 혹은 $\langle v'_{i+3}, v'_{i+2} \rangle$ 가 $G-C$ 의 경계 에지를 이룬다.

(v_j, v_{i+5}) 가 $G-C$ 의 코드 에지인 경우는 v_i 에서 시작하여 C_0 를 따라가면 보조 정리 2에 의하여 $v_j, v_{i+1}, v_{i+4}, v_{i+5}$ 를 지나 다시 v_i 에 도달하여 길이가 4인 사이클을 이루므로 C_0 가 G 의 해밀톤 사이클이라는 사실에 모순된다. $\langle v'_{i+2}, v'_{i+3} \rangle$ 이 $G-C$ 의 경계 에지인 경우는 v_{i+1} 에서 시작하여 C_1 을 따라가면 $v_{i+1}, v_{i+2}, v'_{i+2}, v'_{i+3}, v_{i+3}, v_{i+4}$ 를 지나 v_{i+1} 에 도달하여 길이 6인 사이클을 이루어 모순된다. 그리고 $\langle v'_{i+3}, v'_{i+2} \rangle$ 이 $G-C$ 의 경계 에지인 경우는 v_{i+2} 에서 시작하여 C_0 를 따라가면 $v_{i+2}, v_{i+3}, v'_{i+3}, v'_{i+2}$ 를 지나 v_{i+2} 에 되돌아오므로 길이 4인 사이클을 이루어 C_0 가 G 의 해밀톤 사이클임에 모순된다. 따라서 G' 은 단순 그래프가 된다.

이제 G' 이 해밀톤 분할 가능함을 보인다. C' 을 $C' = v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_{i+5}, v_j, v_{i-1}, \dots, v_0$ 이라고 두면 G' 의 유향 해밀톤 사이클이 되

며 G 의 C 에 대응한다. 그리고 G 의 C_0 에 대응하는 G' 의 C'_0 는 v_i 다음에 v_{i+5} 를 지나고, v'_{i+2} 다음에는 v'_{i+3} 을 지나게 되므로 아래와 같다.

$$C'_0 = v_i, v_{i+5}, P_{1,1}, v'_{i+2}, v'_{i+3}, P_{1,2}$$

또한 C_1 에 대응하는 유향 해밀톤 사이클 C'_1 은 v'_{i+3} 다음에는 v'_{i+2} 를 지나게 된다.

$$C'_1 = v'_{i+3}, v'_{i+2}, P_{1,3}$$

따라서 G' 은 정점이 $n-4$ 개인 대칭 3-정규 유향 그래프가 되며 C', C'_0, C'_1 으로 해밀톤 분할이 가능하게 된다.

이제 그림 2 (a)에 있는 정점들 $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+5}, v'_{i+2}, v'_{i+3}\}$ 에 같은 정점이 있는 경우를 생각해 보자. $v'_{i+2} = v_{i+5}$ 이면 C_0 와 C'_0 에 $P_{1,1}$ 이 없는 경우이고, $v'_{i+3} = v_i$ 이면 C_0 와 C'_0 에 $P_{1,2}$ 이 없는 경우에 해당하며 위의 논리가 모두 성립한다. 위의 두 경우가 동시에 발생하지는 않는데 그것은 C_0 가 길이 6인 사이클임을 의미하기 때문이다.

경우 2 경우 1에 해당하지 않고, $G-C$ 에서 어떤 i 에 대해서 $\langle v_i, v_{i+1} \rangle$ 에서 시작한 해밀톤 사이클이 $\langle v_{i+4}, v_{i+5} \rangle$ 를 먼저 지나고 $\langle v_{i+2}, v_{i+3} \rangle$ 을 지나는 경우

$G-C$ 에서 각각 $\langle v_i, v_{i+1} \rangle$ 과 $\langle v_{i+1}, v_{i+2} \rangle$ 를 지나는 유향 해밀톤 사이클을 C_0, C_1 이라고 하자(그림 2 (b) 참조). 크기 3인 코드 에지가 존재하지 않으므로 그림에 있는 모든 정점들 $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+5}, v'_{i+1}, v'_{i+2}, v'_{i+3}, v'_{i+4}\}$ 는 서로 다르게 된다. v_i 에서 시작하여 C_0 를 따라가면 v_i, v_{i+1}, v'_{i+1} 을 차례로 지난다. v'_{i+4} 에 도달한 후로는 $v'_{i+4}, v_{i+4}, v_{i+5}$ 를 차례로 지나며 v'_{i+2} 에 도달한 후에는 $v'_{i+2}, v_{i+2}, v_{i+3}, v'_{i+3}$ 을 지나게 된다. v_i 에서 시작하여 C_1 을 따라가면 $\langle v_{i+4}, v_{i+5} \rangle$ 를 먼저 지나고 $\langle v_{i+2}, v_{i+3} \rangle$ 을 지나는 경우를 고려하고 있으므로 C_0 를 다음과 같이 나타낼 수 있다. 이때 $P_{2,1}$ 은 C_0 상에서 v'_{i+1} 에서 v'_{i+4} 까지, $P_{2,2}$ 는 v_{i+5} 에서 v'_{i+2} 까지, 그리고 $P_{2,3}$ 는 v'_{i+3} 에서 v_i 까지의 경로를 말한다.

$C_0 = v_i, v_{i+1}, v'_{i+1}, P_{2,1}, v'_{i+4}, v_{i+4}, v_{i+5}, P_{2,2}, v'_{i+2}, v_{i+2}, v_{i+3}, v'_{i+3}, P_{2,3}$
 마찬가지로 방식으로 C_1 을 아래와 같이 나타낼 수 있다. 이 때 $P_{2,4}$ 와 $P_{2,5}$ 는 위와 같은 방식으로 정의되어 있다고 하자.

$$C_1 = v'_{i+1}, v_{i+1}, v_{i+2}, v'_{i+2}, P_{2,4}, v'_{i+3}, v_{i+3}, v_{i+4}, v'_{i+4}, P_{2,5}$$

G 에서 정점들 $\{v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}\}$ 와 이들 정점에 인접한 에지들을 제거하고 경계 에지 $\langle v_i, v_{i+5} \rangle$ 와 $\langle v_{i+5}, v_i \rangle$, 코드 에지 (v'_{i+1}, v'_{i+2}) 와 (v'_{i+3}, v'_{i+4}) 를 추가하여 G' 을 얻는다. G' 이 단순 그래프임을 보인다. G' 이 단순 그래프가 아니라면 다음

이 성립한다.

- (i) (v_i, v_{i+5}) 가 $G-C$ 의 코드 에지이거나,
- (ii) $\langle v'_{i+1}, v'_{i+2} \rangle$ 나 $\langle v'_{i+2}, v'_{i+1} \rangle$ 이 $G-C$ 의 경계 에지이거나, 혹은
- (iii) $\langle v'_{i+3}, v'_{i+4} \rangle$ 나 $\langle v'_{i+4}, v'_{i+3} \rangle$ 이 $G-C$ 의 경계 에지이다.

(v_i, v_{i+5}) 가 $G-C$ 의 코드 에지이라면 v_{i+4} 에서 시작하여 C_0 를 따라가면 $v_{i+4}, v_{i+5}, v_i, v_{i+1}, v'_{i+1}$ 을 차례로 지나게 되어 v_i 에서 시작하여 C_0 를 따라가면 $\langle v_{i+4}, v_{i+5} \rangle$ 를 먼저 지나고 $\langle v_{i+2}, v_{i+3} \rangle$ 을 지난다는 가정에 모순된다. $\langle v'_{i+1}, v'_{i+2} \rangle$ 이 $G-C$ 의 경계 에지라면 C_0 는 $v_i, v_{i+1}, v'_{i+1}, v'_{i+2}, v_{i+2}, v_{i+3}, v'_{i+3}$ 을 차례로 지나게 되어 위와 마찬가지로 $\langle v_{i+2}, v_{i+3} \rangle$ 을 $\langle v_{i+4}, v_{i+5} \rangle$ 보다 먼저 지나게 되어 모순이다. $\langle v'_{i+2}, v'_{i+1} \rangle$ 이 $G-C$ 의 경계 에지인 경우는 C_1 이 $v_{i+1}, v_{i+2}, v'_{i+2}, v'_{i+1}$ 을 지난 후 v_{i+1} 을 지나서 길이 4인 사이클을 이루어 모순된다. $\langle v'_{i+3}, v'_{i+4} \rangle$ 이 $G-C$ 의 경계 에지인 경우는 C_0 가 $v_{i+2}, v_{i+3}, v'_{i+3}, v'_{i+4}, v_{i+4}, v_{i+5}$ 를 차례로 지나게 되어 v_i 에서 시작하여 C_0 를 따라가면 $\langle v_{i+2}, v_{i+3} \rangle$ 을 $\langle v_{i+4}, v_{i+5} \rangle$ 보다 먼저 지나게 되어 모순이다. 마지막으로 $\langle v'_{i+4}, v'_{i+3} \rangle$ 이 $G-C$ 의 경계 에지인 경우는 C_1 이 $v_{i+3}, v_{i+4}, v'_{i+4}, v'_{i+3}$ 을 차례로 지난 후 v_{i+3} 를 지나게 되어 길이 4인 사이클을 이루어 모순된다. 따라서 G' 은 단순 그래프가 된다.

G' 이 해밀톤 분할 가능함을 보이기 위해서 경우 1에서와 같은 방식으로 G 의 해밀톤 사이클 C, C_0, C_1 에 대응하는 G' 의 해밀톤 사이클 C', C'_0, C'_1 을 다음과 같이 정의함으로써 증명이 완성된다. 아래에 정의된 것은 모두 G' 의 해밀톤 사이클을 이루고 있음을 쉽게 알 수 있다.

$$\begin{aligned} C' &= v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_{i+5}, v_i, v_{i-1}, \dots, v_0 \\ C'_0 &= v_i, v_{i+5}, P_{2,2}, v'_{i+2}, v'_{i+1}, P_{2,1}, v'_{i+4}, v'_{i+3}, P_{2,3} \\ C'_1 &= v'_{i+1}, v'_{i+2}, P_{2,4}, v'_{i+3}, v'_{i+4}, P_{2,5} \end{aligned}$$

경우 3 경우 1, 2에 해당하지 않는 나머지 경우

v_i 를 G 의 임의의 정점이라 하고 $G-C$ 에서 각각 $\langle v_i, v_{i+1} \rangle$ 과 $\langle v_{i+1}, v_{i+2} \rangle$ 를 지나는 유형 해밀톤 사이클을 C_0, C_1 이라고 하자(그림 2 (c) 참조). 그림에 있는 모든 정점 $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+6}, v'_{i+1}, \dots, v'_{i+5}\}$ 가 서로 다른 경우를 먼저 고려하기로 한다. $\langle v_i, v_{i+1} \rangle$ 에서 시작하여 C_0 를 따라가면 $\langle v_{i+2}, v_{i+3} \rangle$ 을 지난 다음 $\langle v_{i+4}, v_{i+5} \rangle$ 를 지나고, C_1 에 대해서도 $\langle v_{i+1}, v_{i+2} \rangle$ 에서 시작하면 $\langle v_{i+3}, v_{i+4} \rangle$ 를 지난 다음

$\langle v_{i+5}, v_{i+6} \rangle$ 을 지난다. 그렇지 않으면 경우 2에 해당한다.

앞의 경우와 마찬가지로 방식으로 C_0 와 C_1 을 다음과 같이 나타낼 수 있다. 이 때 $P_{3,1}, P_{3,2}, P_{3,3}, P_{3,4}, P_{3,5}, P_{3,6}$ 은 앞의 경우 1, 2에서와 같은 방식으로 적절하게 정의되어 있다고 생각하자.

$$C_0 = v_i, v_{i+1}, v'_{i+1}, P_{3,1}, v'_{i+2}, v_{i+2}, v_{i+3}, v'_{i+3}, P_{3,2}, v'_{i+4}, v_{i+4}, v_{i+5}, v'_{i+5}, P_{3,3}$$

$$C_1 = v'_{i+1}, v_{i+1}, v_{i+2}, v'_{i+2}, P_{3,4}, v'_{i+3}, v_{i+3}, v_{i+4}, v'_{i+4}, P_{3,5}, v'_{i+5}, v_{i+5}, v_{i+6}, P_{3,6}$$

G 에서 정점들 $\{v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+4}, v_{i+5}\}$ 과 이들 정점에 인접한 에지들을 제거하고 경계 에지 $\langle v_j, v_{i+3} \rangle, \langle v_{i+3}, v_i \rangle, \langle v_{i+3}, v_{i+6} \rangle, \langle v_{i+6}, v_{i+3} \rangle$, 그리고 코드 에지 $(v'_{i+1}, v'_{i+4}), (v'_{i+2}, v'_{i+5})$ 를 첨가하여 G' 을 구성한다. 여기서 G' 이 단순 그래프임을 보인다. 단순 그래프가 아니기 위한 조건은 아래와 같다.

- (i) (v_i, v_{i+3}) 이나 (v_{i+3}, v_{i+6}) 가 $G-C$ 의 코드 에지이거나,
- (ii) $\langle v'_{i+1}, v'_{i+4} \rangle$ 나 $\langle v'_{i+4}, v'_{i+1} \rangle$ 이 $G-C$ 의 경계 에지이거나, 혹은
- (iii) $\langle v'_{i+2}, v'_{i+5} \rangle$ 나 $\langle v'_{i+5}, v'_{i+2} \rangle$ 가 $G-C$ 의 경계 에지이다.

크기가 3인 코드 에지가 존재하면 경우 1에 해당하므로 (v_j, v_{i+3}) 이나 (v_{i+3}, v_{i+6}) 가 $G-C$ 의 코드 에지일 수는 없다. $\langle v'_{i+1}, v'_{i+4} \rangle$ 가 $G-C$ 의 경계 에지일 경우는 v_i 에서 시작하여 C_0 를 따라가면 $v_j, v_{i+1}, v'_{i+1}, v'_{i+4}, v_{i+4}, v_{i+5}, v'_{i+5}$ 를 차례로 지나게 되어 $\langle v_j, v_{i+1} \rangle$ 에서 시작하면 $\langle v_{i+4}, v_{i+5} \rangle$ 을 지난 다음 $\langle v_{i+2}, v_{i+3} \rangle$ 를 지나게 되어 경우 3에 해당하지 않고 경우 2에 해당된다. $\langle v'_{i+4}, v'_{i+1} \rangle$ 이 $G-C$ 의 경계 에지이면 v_{i+3} 에서 시작하여 C_1 를 따라가면 $v_{i+3}, v_{i+4}, v'_{i+4}, v'_{i+1}, v_{i+1}, v_{i+2}, v'_{i+2}$ 를 지나게 되는데, v_{i+1} 에서 시작하면 $\langle v_{i+5}, v_{i+6} \rangle$ 을 $\langle v_{i+3}, v_{i+4} \rangle$ 보다 먼저 지나게 되어 마찬가지로 경우 2에 해당된다. $\langle v'_{i+2}, v'_{i+5} \rangle$ 가 $G-C$ 의 경계 에지이면 C_1 이 $v_{i+1}, v_{i+2}, v'_{i+2}, v'_{i+5}, v_{i+5}, v_{i+6}$ 을 지나게 되고, $\langle v'_{i+5}, v'_{i+2} \rangle$ 가 $G-C$ 의 경계 에지이면 C_0 가 $v_{i+4}, v_{i+5}, v'_{i+5}, v'_{i+2}, v_{i+2}, v_{i+3}$ 을 지나게 되어 모두 경우 3에 해당하지 않는다. 따라서 G' 은 단순 그래프가 된다.

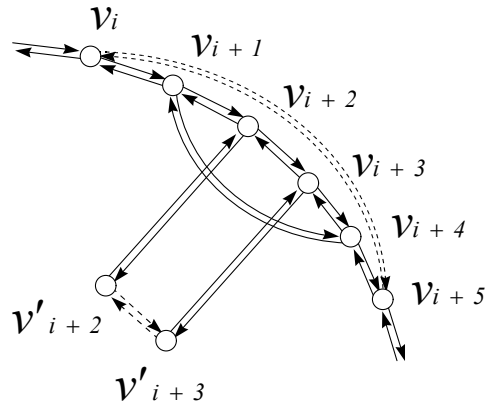
G' 이 해밀톤 분할 가능함을 보이는 것은 경우 1과 경우 2에서와 마찬가지로 해밀톤 사이클 C', C'_0, C'_1 을 다음과 같이 정의함으로써 증명이 완성된다.

$$C' = v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_{i+6}, v_{i+3}, v_i, v_{i-1}, \dots, v_0$$

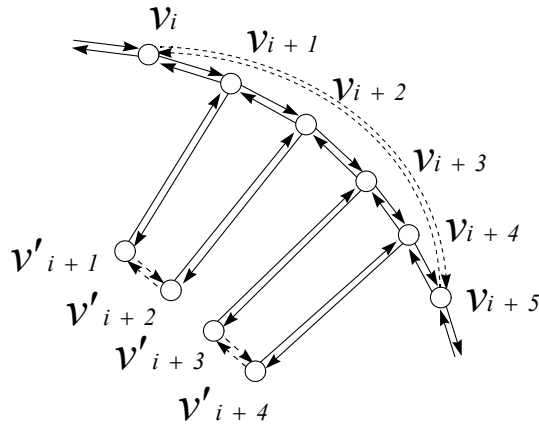
$$C'_0 = v_i, v_{i+3}, v'_{i+3}, P_{3,2}, v'_{i+4}, v'_{i+1}, P_{3,1}, v'_{i+2}, v'_{i+5}, P_{3,3}$$

$$C'_1 = v'_{i+1}, v'_{i+4}, P_{3,5}, v'_{i+5}, v'_{i+2}, P_{3,4}, v'_{i+3}, v_{i+3}, v_{i+6}, P_{3,6}$$

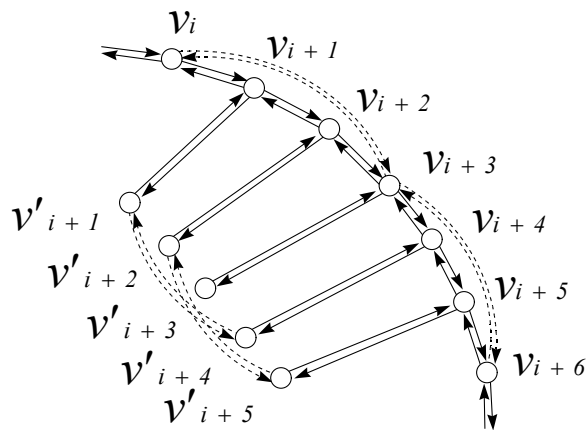
이제 그림에 있는 정점들 $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+6}, v'_{i+1}, \dots, v'_{i+5}\}$ 중에 같은 정점이 있을 때를 고려한다. $v'_{i+1} = v_{i+6}$ 일 수 있으나 이것은 $P_{3,6}$ 이 없는 경우이며, $v'_{i+5} = v_i$ 일 때는 $P_{3,3}$ 이 없는 경우에 해당된다. 앞의 두 등식이 모두 성립할 수 있으나 이 경우에도 위의 논리가 성립한다. 크기가 3인 코드 에지가 없으므로 이 외의 경우는 발생하지 않는다. ■



(a)



(b)



(c)

그림 2 보조 정리 3 증명의 설명

이제 위의 보조 정리 3을 이용하여 $n=4k$ 인 대칭 3-정규 유향 그래프 G 는 해밀톤 분할이 불가능함을 보인다.

정리 2 정점을 $4k$ 개 가진 어떤 대칭 3-정규 유향 그래프도 해밀톤 분할이 불가능하다.

증명 정점의 개수 n 에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다. 먼저 $n=4$ 인 경우 대칭 3-정규 유향 그래프 G 는 완전 유향 그래프가 된다. G 가 해밀톤 분할이 가능하기 위해서는 정리 1의 필요 조건을 만족하여야 하지만 G 는 이분 그래프가 아니므로 해밀톤 분할이 불가능하다. 이제 $n=4k$ 일 때 위 정리가 성립한다고 가정하고 $n=4(k+1)$ 일 때 위 정리가 성립함을 보인다. $n=4(k+1)$ 일 때 위 정리가 성립하지 않는다고 가정하자. 즉 $n=4(k+1)$ 일 때 해밀톤 분할이 가능한 대칭 3-정규 유향 그래프가 존재한다고 가정한다. 그러면 보조 정리 3에 의해서 $n=4k$ 이면서 해밀톤 분할이 가능한 대칭 3-정규 유향 그래프가 존재하게 되는데 이것은 가정에 모순이다. 따라서 위 정리가 성립한다. ■

4 다중컴퓨터 위상

분지수가 3인 다중컴퓨터의 위상으로는 CCC, 코달 링, $C_m \oplus C_m$ 등이 있다. 이들은 모두 무향 에지를 가지지만 각 무향 에지를 양 방향의 두 유향 에지로 간주한다.

4.1 CCC

m -차원 CCC는 m -차원 하이퍼큐브의 각 노드를 길이가 m 인 사이클로 대체하여 구성한다. CCC는 $m2^m$ 개의 노드를 가지며 해밀톤 사이클을 가지고 있다고 알려져 있다[7].

정리 3 모든 m -차원 CCC는 해밀톤 분할이 불가능하다. 이 때 $m \geq 3$ 이다.

증명 CCC의 노드의 개수는 $m2^m$ 으로 4의 배수이므로 정리 2에 의하여 해밀톤 분할이 불가능하다. ■

4.2 코달 링

코달 링 $CR(n, r)$ 은 해밀톤 사이클 v_0, v_1, \dots, v_{n-1} 에 모든 짝수 i 에 대해서 (v_i, v_{i+r}) 이 에지가 되는 그래프이다. 물론 r 은 홀수이며 코달 링은 이분 그래프가 된다.

정리 4 코달 링 $CR(n, r)$ 에 대하여 $n=4k$ 이면 해밀톤 분할이 불가능하다. $n=4k+2$ 일 때에는 $n/2$ 이 $\lfloor r/2 \rfloor$ 과 $\lceil r/2 \rceil$ 에 서로 소이면 해밀톤 분할이 가능하다.

증명 $n=4k$ 인 코달 링 $CR(n, r)$ 은 정리 2에 의해서 해밀톤 분할이 불가능하다. $n=4k+2$ 인 $CR(n, r)$ 이 유향 해밀톤 사이클 $C = v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_0$ 를 포함하여 해밀톤 분할이 가능할 충분 조건을 생각하여 보자. 2절에서 정의한 G_0^C 와 G_1^C 이 길이 $n/2$ 인 사이클을 이루어야 하고, 또 그렇게 되면 해밀톤 분할이 가능하다. G_0^C 와 G_1^C 이 사이클을 이룬다는 것과 $n/2$ 이 각각 $\lfloor r/2 \rfloor$ 과 $\lceil r/2 \rceil$ 에 서로 소라는 것은 같은 조건이 되므로 위의 정리가 성립한다. ■

$CR(4k+2, 3)$ 이 위 정리에 의해서 해밀톤 분할이 가능하다. 즉, $n=4k+2$ 일 때 해밀톤 분할이 가능한 코달 링이 존재하며 따라서 대칭 3-정규 유향 그래프에 대해서도 마찬가지이다. 코달 링인 경우 이 뿐만 아니라 $CR(4k+2, 2k+1)$ 와 $CR(4k+2, 4k-1)$ 도 해밀톤 분할이 가능함을 위 정리를 이용하면 알 수 있다. 그러나 위 정리가 필요 충분 조건이 되지는 못한다. 즉, 유향 해밀톤 사이클 $v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_0$ 를 포함하여 해밀톤 분할이 불가능하지만 그 사이클을 포함하지 않으면 해밀톤 분할이 가능한 경우가 있는데, 정점의 수가 최소인 예가 $CR(30, 5)$ 이다.

4.3 $C_m \oplus C_m$

$C_m \oplus C_m$ 은 두 개의 길이 m 인 사이클 그래프의 정점 사이에 임의로 에지를 이어서 만든 분지수가 3인 그래프를 말한다. C_m 과 K_2 의 그래프 곱 $C_m \times K_2$ 가 $C_m \oplus C_m$ 그래프 부류에 속하며 Petersen 그래프는 $C_5 \oplus C_5$ 그래프 부류에 속한다.

정리 5 모든 m 에 대해서 $C_m \oplus C_m$ 은 해밀톤 분할이 불가능하다. 이 때 $m \geq 3$ 이다.

증명 $C_m \oplus C_m$ 은 $2m$ 개의 정점을 가진다. m 이 홀수이면 $C_m \oplus C_m$ 은 이분 그래프가 아니므로 정리 1에 의하여 해밀톤 분할이 불가능하다. 그리고 m 이 짝수이면 정점의 개수가 4의 배수가 되므로 정리 2에 의해서 역시 해밀톤 분할이 불가능하다. ■

5 결론

이 논문에서는 분지수가 3인 다중컴퓨터 위상의 해밀톤 분할 여부에 대한 새로운 조건을 제시함으로써 워홀 라우팅 모델 하에서 분지수가 3인 다중컴퓨터의 방송이나 멀티캐스팅 등의 신뢰성 있는 통신 알고리즘을 설계할 때 해밀톤 분할을 이용한 통신 알고리즘을 직접 이용할 수 있는지에 대하여 연구하였다. 해밀톤 분할이 가능한 그래프는 이분 그래프이어야 하며 정점의 수가 $4k$ 이면 해밀톤 분할이 불가능하고 $4k+2$ 이면 해밀톤 분할 가능한 그래프가 존재함을 보였다. 이 결과를 분지수가 3인 다중컴퓨터 위상에 적용하여 모든 CCC와

$C_m \oplus C_m$ 은 해밀톤 분할이 불가능함을 보였고, 코달 링에 대해서는 정점이 $4k$ 이면 해밀톤 분할이 불가능하고 $4k+2$ 이면 해밀톤 분할이 가능한 그래프가 있음을 보였다. 코달 링이 해밀톤 분할 가능할 필요 충분 조건을 밝히는 것은 미해결 문제로 남아 있다.

참고문헌

- [1] B. W. Arden and H. Lee, "Analysis of chordal ring network," *IEEE Trans. Computers*, vol. 30, pp. 291-295, 1981.
- [2] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, 5th printing, American Elsevier Publishing Co., Inc., 1976.
- [3] J. Bosàk, *Decompositions of Graphs*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1990.
- [4] S. J. Curran and J. A. Gallian, "Hamiltonian cycles and paths in Cayley graphs and digraphs - a survey," *Discrete Mathematics*, vol. 156, pp. 1-18, 1996.
- [5] S. Lee and K. G. Shin, "Interleaved all-to-all broadcast on meshes and hypercubes," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, vol. 5, pp. 449-458, 1994.
- [6] J.-H. Lee, C.-S. Shin, and K.-Y. Chwa, "Directed hamiltonian packing in d -dimensional meshes and its applications," in *Proc. of 7th International Symposium on Algorithms and Computation ISAAC'96*, Osaka, Japan, pp. 295-304, 1996.
- [7] F. T. Leighton, *Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays · Trees · Hypercubes*, Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, California, 1992.