

# $m$ 과 $n$ 이 짝수인 이중 루프 네트워크 $G(mn; 1, m)$ 의 고장 해밀톤 성질\*

박 정흠<sup>1</sup>, 김 희철<sup>2</sup>

<sup>1</sup>가톨릭대학교 컴퓨터·전자공학부  
420-743 경기도 부천시 원미구 역곡 2동 산 43-1  
jhpark@tcs.cuk.ac.kr  
전화 (032) 340-3366, 팩스 (032) 340-3777

<sup>2</sup>한국외국어대학교 컴퓨터공학과  
449-791 경기도 용인군 모현면 왕산리 산 89  
hckim@maincc.hufs.ac.kr  
전화 (0335) 330-4267, 팩스 (0335) 333-1696

## Fault Hamiltonicity of Double Loop Networks $G(mn; 1, m)$ with Even $m$ and $n$

Jung-Heum Park<sup>1</sup> and Hee-Chul Kim<sup>2</sup>

<sup>1</sup>School of Computer and Electronics Engineering  
The Catholic University of Korea  
Yokkok 2-dong 43-1, Wonmi-gu, Puchon City, Kyonggi-do 420-743  
jhpark@tcs.cuk.ac.kr  
TEL (032) 340-3366, FAX (032) 340-3777

<sup>2</sup>Department of Computer Science and Engineering  
Hankuk University of Foreign Studies  
Wangsan-ri 89, Mohyun-myun, Yongin-gun, Kyonggi-do 449-791  
hckim@maincc.hufs.ac.kr  
TEL (0335) 330-4267, FAX (0335) 333-1696

---

\* 이 논문은 한국과학재단 특정기초연구(98-0102-07-01-3)의 연구비를 지원 받았음.

$m$ 과  $n$ 이 짝수인 이중 루프 네트워크

$G(mn;1,m)$ 의 고장 해밀톤 성질

Fault Hamiltonicity of Double Loop Networks

$G(mn;1,m)$  with even  $m$  and  $n$

### 요약

이 논문은 에지나 정점, 혹은 모두에 고장이 있는 이중 루프 네트워크의 해밀톤 성질을 고려한다. 이중 루프 네트워크  $G(mn;1,m)$ 은  $m \times n$  그리드 그래프에 에지를 추가한 4-정규 그래프이다.  $m$ 과  $n$ 이 모두 짝수인 이중 루프 네트워크  $G(mn;1,m)$ 은 고장난 요소(에지와 정점)의 수가 1 이하인 경우에 해밀톤 연결되어 있고, 고장난 요소의 수가 2 이하인 경우에 항상 해밀톤 사이클을 가짐을 보인다.

### Abstract

In this paper, we consider hamiltonian properties of a double loop network with edge and/or vertex faults. A double loop network  $G(mn;1,m)$  is a 4-regular graph obtained by adding some edges to an  $m \times n$  rectangular grid graph. We show that a double loop network  $G(mn;1,m)$  with even  $m$  and  $n$  has a hamiltonian path joining every pair of vertices if the number of faulty elements is 1 or less, and has a hamiltonian cycle if the number of faulty elements is 2 or less.

# 1 서론

고성능 컴퓨터를 설계하기 위해서 다중 컴퓨터 네트워크를 구성하는 것은 비용이 적게 드는 방식이다[5]. 다중 컴퓨터 네트워크는 개별 기억장치를 가지는 노드와 노드를 서로 이어주는 통신 링크로 이루어져 있다. 다중 컴퓨터 네트워크에서 연결망 구조는 전체 시스템의 성능에 크게 영향을 미치는 것으로 알려져 있다. 연결망 구조는 그래프로 자연스럽게 모델할 수 있는데, 이 때 노드는 그래프의 정점에 대응되고 통신 링크는 에지에 대응된다.

이중 루프 네트워크(double loop network)는 링 네트워크와 비교할 때 에지 수를 늘임으로써 연결도를 높이고 지름을 낮춘 것이라고 볼 수 있다. 이중 루프 네트워크  $G(N, a_1, a_2)$ 는  $N$ 개의 노드  $\{v_0, v_1, \dots, v_{N-1}\}$ 을 가지고  $s + a_i \equiv t \pmod{N}$ 을 만족하는 정수  $i, 1 \leq i \leq 2$ 가 존재하면 두 노드  $v_s, v_t$ 를 잇는 에지가 있다. 다시 말하면,  $G(N, a_1, a_2)$ 는 정점의 수가  $N$ 이고 점프가  $a_1, a_2$ 인 circulant 그래프  $C_N(a_1, a_2)$ 이다. 이중 루프 네트워크  $G(24; 1, 4)$ 의 예가 아래 그림 1 (a)에 있다. 그림 1 (b)에 있는 그래프는 (a)에 있는 그래프와 동형이다.

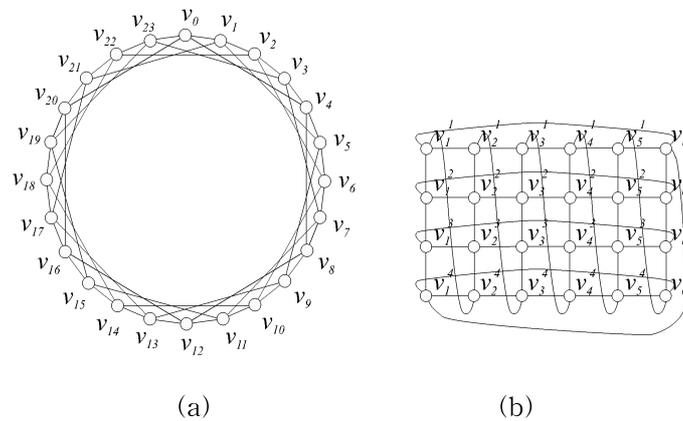


그림 1 이중 루프 네트워크  $G(24; 1, 4)$

이 논문에서는  $a_1 = 1$ ,  $a_2$ 는 짝수, 그리고  $N$ 이  $a_2$ 의 짝수 배인 이중 루프 네트워크, 즉  $m$ 과  $n$ 이 짝수인  $G(mn; 1, m)$ 을 고려하기로 한다. 그리고  $n = 2$ 이면 분지수가 3이 되므로,  $n \geq 4$ 라고 가정한다. 이중 루프 네트워크  $G(mn; 1, m)$ 은  $m \times n$  그리드 그래프와 동형인 스페닝 부그래프를 가진다. 다시 말하면,  $G(mn; 1, m)$ 은  $m \times n$  그리드 그래프에 랩어라운드(wraparound) 에지를 추가하여 만든 4-정규 그래프이다. 앞으로  $G(mn; 1, m)$ 을  $m \times n$  DLN(Double Loop Network)이라고 말하기로 한다.

해밀톤 문제는 그래프 이론 분야에서 널리 알려진 문제 중의 하나이다. 그래프의 해밀톤 사이클은 그 그래프의 스페닝 사이클, 즉 모든 정점을 포함하는 사이클을 말하고, 모든 정점을 지나는 경로를 해밀톤 경로라고 한다. 해밀톤 사이클을 가진 그래프를 해밀톤 그래프라고 한다. 연결망 구조가 해밀톤 사이클을 가지고 있으면 노드나 통신 링크에 고장이 발생하

더라도 링이나 선형배열을 쉽게 실현할 수 있어서 파이프라인 계산 등에 유용하다고 알려져 있다.

$m \times n$  DLN은 해밀톤 사이클을 가지고 있다. 게다가  $m \times n$  DLN은 임의의 두 정점을 잇는 해밀톤 경로를 가지고 있는 해밀톤 연결된 그래프이다[2]. abelian 군에 대한 연결된 Cayley 그래프가 분지수가 5이하이면 항상 해밀톤 분할이 가능하므로[3],  $m \times n$  DLN은 에지가 서로소인(disjoint) 두 개의 해밀톤 사이클로 분할할 수 있다. 이 논문에서는 이중 루프 네트워크  $m \times n$  DLN의 고장 해밀톤 성질, 즉 에지나 정점, 혹은 모두에 고장이 발생하였을 때의 해밀톤 성질을 고찰한다.

그래프  $G$ 에 있는  $k$ 개 혹은 그 이하의 에지에 고장이 발생하여 이들 고장난 에지를 삭제하더라도  $G$ 가 해밀톤 사이클을 가지면,  $G$ 를  $k$ -에지 고장 해밀톤 그래프( $k$ -edge-fault hamiltonian)라고 말한다.  $k$ 개 혹은 그 이하의 에지에 고장이 발생하더라도 해밀톤 연결되어 있으면,  $k$ -에지 고장 해밀톤 연결된 그래프( $k$ -edge-fault hamiltonian-connected)라고 한다. 그래프의 에지 고장뿐만 아니라 정점 고장에 대해서도 마찬가지로  $k$ -정점 고장 해밀톤 그래프( $k$ -vertex-fault hamiltonian),  $k$ -정점 고장 해밀톤 연결된 그래프( $k$ -vertex-fault hamiltonian-connected)를 정의할 수 있다.

에지나 정점 어떤 요소에 고장이 발생하더라도 그 수가  $k$  이하인 경우 해밀톤 사이클을 가지면  $k$ -고장 해밀톤 그래프( $k$ -fault hamiltonian)이라고 말하고, 마찬가지로  $k$ -고장 해밀톤 연결된 그래프( $k$ -fault hamiltonian-connected)를 정의할 수 있다. 그래프가 해밀톤 사이클을 가지기 위해서는 최소 분지수가 2 이상이라는 조건을 만족해야 하므로,  $G$ 가  $k$ -고장 해밀톤 그래프이면  $k \leq \delta(G) - 2$ 이다. 여기서  $\delta(G)$ 는  $G$ 의 최소 분지수이다. 그리고 그래프가 해밀톤 연결되기 위해서는 최소 분지수가 3 이상이므로,  $G$ 가  $k$ -고장 해밀톤 연결된 그래프라면 반드시  $k \leq \delta(G) - 3$ 이다.

이 논문에서는  $m$ 과  $n$  ( $n \geq 4$ )이 모두 짝수인  $m \times n$  DLN은 1-고장 해밀톤 연결된 그래프이며 2-고장 해밀톤 그래프임을 보인다. 이 결과는 이중 루프 네트워크의 분지수가 4이므로 2-고장 해밀톤 연결된 그래프나 3-고장 해밀톤 그래프가 될 수 없다는 점에서 최적이다.

$n$ -차원 하이퍼큐브  $Q_n$ 에서 고장인 요소의 수가  $n-1$  이하일 때  $f_v > 0$ 이면 길이  $2^n - 2f_v$  이상인 사이클을 가지고,  $f_v = 0$ 이면 길이  $2^n - 2$  이상인 사이클을 가지고 있음이 알려져 있다[6]. 여기서  $f_v$ 는 정점 고장의 수이다.  $n$ -차원 스타 그래프  $S_n$ 의 고장 해밀톤 성질은 [8]에서 고려하였는데, 고장인 요소의 수가  $n-3$  이하일 때  $S_n$ 은 길이가  $n! - 4f_v$  이상인 사이클이 존재함을 보였다. 하이퍼큐브나 스타 그래프는 모두 이분 그래프이기 때문에, 1-고장 해밀톤 그래프나 1-고장 해밀톤 연결된 그래프가 될 수 없다. 유향 이중 루

프 네트워크에서 노드나 에지에 고장이 하나 발생할 때 해밀톤 사이클을 가질 필요충분조건은 [7]에 알려져 있다. 최근에 이차원  $m \times n$  토러스는 이분 그래프가 아닐 때, 1-고장 해밀톤 연결된 그래프이며 2-고장 해밀톤 그래프임이, 그리고 이분 그래프일 때 1-고장 bihamiltonian 연결된 그래프임이 밝혀졌다[9].

여기서 정의하지 않은 그래프 이론적인 용어는 [1]을 따른다. 이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2 절에서 이중 루프 네트워크와 그리드 그래프에 대한 정의와 표기법 및 그들의 기본적인 성질을 알아본다. 3절에서는 에지 고장을 고려하여  $m \times n$  DLN이 1-에지 고장 해밀톤 연결된 그래프이며 2-에지 고장 해밀톤 그래프임을 보인다. 4절에서는 정점 고장을 고려하여  $m \times n$  DLN이 1-정점 고장 해밀톤 연결된 그래프이며 2-정점 고장 해밀톤 그래프임을 보인다. 5절에서 에지와 정점 고장 모두를 고려하여 이 논문의 주요 결과를 제시하고, 마지막으로 6절에서 이 논문의 결론을 기술하기로 한다.

## 2 이중 루프 네트워크와 그리드 그래프

이중 루프 네트워크  $m \times n$  DLN은 다음과 같이  $m \times n$  그리드 그래프에 에지를 추가하는 방식으로 정의할 수 있다(그림 1 (b) 참조):

- 정점 집합  $V = \{v_j^i \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ 이고,
- 에지 집합  $E = E_h \cup E_v$ 이다. 여기서,

$$E_h = \{(v_j^i, v_{j+1}^i) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j < n\} \cup \{(v_n^i, v_1^i) \mid 1 \leq i \leq m\}$$

$E_v = \{(v_j^i, v_j^{i+1}) \mid 1 \leq i < m, 1 \leq j \leq n\} \cup \{(v_j^1, v_j^m) \mid 1 \leq j < n\} \cup \{(v_n^1, v_n^m)\}$ 이다. 이때  $m \times n$  그리드 그래프에 추가된 에지를 랩어라운드(wraparound) 에지라고 말한다.

2차원  $m \times n$  토러스는 길이  $m$ 과 길이  $n$ 인 사이클의 그래프 곱으로 정의되는데, 이것도 결국은  $m \times n$  그리드 그래프에 랩어라운드 에지가 추가된 4-정규 그래프이다.  $m \times n$  DLN과  $m \times n$  토러스의 연결도는 모두 4로 같다. 그러나  $m \times n$  토러스의 지름은  $\lfloor m/2 \rfloor + \lfloor n/2 \rfloor$ 이고  $m \times n$  DLN의 지름은 항상  $m \times n$  토러스의 지름과 같거나 그 이하이다. 특히  $m$ 과  $n$ 이 짝수인 경우  $m \times n$  DLN의 지름은  $m/2 + n/2 - 1$ 로  $m \times n$  토러스의 지름보다 작다.

$m \times n$  DLN에서 행  $i$ 에 속한 정점은  $\{v_j^i \mid 1 \leq j \leq n\}$ 이고 열  $j$ 에 속한 정점은  $\{v_j^i \mid 1 \leq i \leq m\}$ 이다.  $E_h$ 에 속하는 에지를 가로 에지,  $E_v$ 에 속하는 에지를 세로 에지라고 부르기로 한다. 세로 에지는 해밀톤 사이클을 이루며, 가로 에지는  $m$ 개의 정점이 서로소인 길이  $n$ 인 사이클을 이룬다. 인접한 두 행에 속한 정점으로 유도되는 부그래프(induced subgraph)는  $2 \times n$  그리드 그래프를 스패닝 부그래프로 가진다.

$m \times n$  DLN은 정점 대칭이지만, 에지 대칭이지는 않다. 그림 1 (b)에 있는  $4 \times 6$  DLN에서 가로 에지  $(v_3^1, v_4^1)$ 를 지나가는 길이 5인 사이클은 하나밖에 없지만, 에지  $(v_4^1, v_4^2)$ 를 지나가는 길이 5인 사이클은 둘 있다. 그러나 두 가로 에지 (혹은 세로 에지)는 서로 similar하다. 다시 말하면, 임의의 두 가로 에지 (혹은 세로 에지)  $(x, y)$ 와  $(x', y')$ 에 대해서  $g(x) = x'$ 이고  $g(y) = y'$ 인 automorphism  $g$ 가 존재한다.

$m$ 과  $n$ 이 모두 짝수일 경우  $m \times n$  DLN은 길이  $m+1$ 인 사이클을 가지므로 이분 그래프가 아니다.  $m \times n$  DLN의 정점  $v_j^i$ 는  $i+j$ 가 홀수이면 흰색 정점, 짝수이면 검정 정점이라고 부르기로 한다.  $m$ 과  $n$ 이 짝수인 경우 랩어라운드 에지가 아닌 모든 에지와 가로 랩어라운드 에지는 모두 서로 다른 색을 가진 두 정점을 잇는다. 그러나 세로 랩어라운드 에지는 모두 같은 색을 가진 정점 쌍을 잇는다. 흰색 정점의 집합을  $W$ , 검정 정점의 집합을  $B$ 라고 하자.

$m \times n$  그리드 그래프는 길이가 각각  $m, n$ 인 경로 그래프의 그래프 곱으로 정의할 수 있고,  $m \times n$  DLN에서 랩어라운드 에지를 모두 제거하여 얻을 수 있다.  $m \times n$  그리드 그래프는 이분 그래프가 된다.

이분 그래프에서  $W$ 와  $B$ 를 각각 이분 정점 집합이라고 할 때, 아래의 조건중 하나를 만족하는 이분 그래프를 *bihamiltonian 연결된 그래프*라고 한다:

- (a)  $|W|=|B|$ 이고, 모든 흰색 정점과 검정 정점 쌍을 잇는 해밀톤 경로를 가지거나,
- (b)  $|W|=|B|+1$ 이고, 모든 흰색 정점 쌍을 잇는 해밀톤 경로를 가지거나, 혹은
- (c)  $|W|=|B|-1$ 이고, 모든 검정 정점 쌍을 잇는 해밀톤 경로를 가진다.

다음과 같은 그리드 그래프의 해밀톤 성질이 알려져 있다. 그리드 그래프에서 분지수가 2인 정점을 꼭지 정점이라고 한다.

**보조정리 1[4]** (a)  $m, n$ 이 모두 4 이상인 정수일 때  $m \times n$  그리드 그래프는 bihamiltonian 연결된 그래프이다. (b)  $n$ 이 3 이상인 정수일 때  $2 \times n$  그리드 그래프의 서로 다른 색을 가진 두 정점이 서로 다른 열에 있거나 혹은 두 정점이 모두 열 1 혹은  $n$ 에 있으면 두 정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다.

**보조정리 2[2]**  $m, n$ 이 모두 2 이상인 임의의 정수일 때, 다음이 성립한다. (a)  $mn$ 이 짝수이면  $m \times n$  그리드 그래프는 한 꼭지 정점과 색이 다른 임의의 정점을 잇는 해밀톤 경로를 가진다. (b)  $mn$ 이 홀수이면  $m \times n$  그리드 그래프는 한 꼭지 정점과 색이 같은 임의의 정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다.

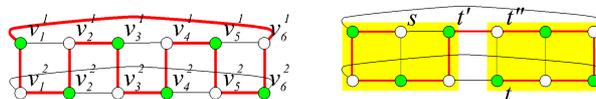
정점  $\{v_j^i \mid i \leq x \leq i', j \leq y \leq j'\}$ 으로 유도되는  $m \times n$  그리드 그래프의 부그래프를  $Grid(v_j^i, v_{j'}^{i'})$ 이라고 쓰고,  $Grid(v_j^i, v_{j'}^{i'})$ 의 두 정점  $a, b$ 를 잇는 해밀톤 경로가 존재하면

그 해밀톤 경로를  $HP(a, b, v_j^1, v_j^2)$ 라고 쓰기로 한다. 그래프의 경로를 에지의 집합으로 간주하여, 경로  $P$ 에 에지  $e$ 나 에지 집합  $X$ 를 추가하는 경우는  $P+e$ ,  $P+X$ 라고 표기하고,  $P$ 에서 에지나 에지 집합을 제거하는 경우는  $P-e$ ,  $P-X$ 로 표기하기로 한다. 또한 에지들  $e_1, e_2, \dots, e_t$ 을 추가할 때는  $P+\sum_{1 \leq i \leq t} e_i$ , 제거할 때는  $P-\sum_{1 \leq i \leq t} e_i$ 와 같이 표기하기로 한다.

인접한 두 행에 속한 정점으로 유도되는 부그래프(induced subgraph)는  $m \geq 4$ 이면  $K_2 \times C_n$ 과 동형이고,  $m=2$ 이면  $K_2 \times C_n$ 을 스패닝 부그래프로 가진다.  $n$ 이 짝수일 때  $K_2 \times C_n$ 은 이분 그래프가 된다.  $m$ 에 대한 수학적 귀납법으로  $m \times n$  DLN의 해밀톤 성질을 증명할 때 다음과 같은  $K_2 \times C_n$ 의 해밀톤 성질은 매우 유용하다.

**보조정리 3**  $K_2 \times C_n$ 은 bihamiltonian 연결된 그래프이다. 그리고 서로 다른 색을 가진 두 정점  $s, t$ 가 모두 열  $n$ 에 속하는 경우가 아니면, 열  $n$ 에 속한 세로 에지  $(v_n^1, v_n^2)$ 을 지나는 해밀톤 경로를 가진다.

**증명**  $s$ 는 열  $i$ ,  $t$ 는 열  $j$ 에 속한다고 하자.  $i=j$ 이면 그림 2 (a)와 같이  $K_2 \times C_n$ 이 해밀톤 사이클  $\sum_{1 \leq j \leq n} (v_j^1, v_j^2) + \sum_{1 \leq j < n, j \text{는 짝수}} (v_j^1, v_{j+1}^1) + \sum_{1 \leq j < n, j \text{는 홀수}} (v_j^2, v_{j+1}^2) + (v_1^1, v_n^1)$ 을 가지는데, 이 사이클에서 에지  $(s, t)$ 를 제거함으로써  $s, t$ 를 잇는 해밀톤 경로를 얻을 수 있다. 이 경로는  $s, t$ 가 모두 열  $n$ 에 속하는 경우가 아니면  $(v_n^1, v_n^2)$ 을 지난다.  $i \neq j$ 인 경우는  $i < j$ 라고 가정한다(그림 2 (b) 참조).  $t$ 는 행  $x$ 에 속한다고 하고,  $x$ 와 다른 행을  $x'$ 이라고 하자. 즉,  $t = v_j^x$ 이다. 그리고  $t' = v_{j-1}^{x'}$ 이라고 하면  $t'$ 은  $t$ 와 같은 색을 가지므로  $s$ 와는 다른 정점이다.  $Grid(v_1^1, v_{j-1}^2)$ 에서  $s$ 와  $t'$ 을 잇는 해밀톤 경로  $HP(s, t'; v_1^1, v_{j-1}^2)$ 는  $j-1 \geq 2$ 이면 보조정리 2 (a)에 의해서,  $j-1=1$ 이면  $s$ 와  $t'$ 이 서로 다른 색을 가지므로 존재하는데, 이 경로를  $P_1$ 이라고 하자.  $t'' = v_j^{x'}$ 이라고 하고  $P_2 = HP(t, t''; v_j^1, v_n^2)$ 는 에지  $(v_n^1, v_n^2)$ 을 지난다. 그러면  $P_1 + P_2 + (t', t'')$ 은 우리가 원하는 해밀톤 경로이다.  $\square$



(a) (b)  
그림 2 보조정리 3 증명의 설명

**주의** 위의 보조정리 3에서 설계한 해밀톤 경로는 가로 랩어라운드 에지  $(v_1^1, v_n^1)$ 을 지나지 않는다.

**보조정리 4**  $K_2 \times C_n$ 에서 흰색 정점  $s_1, s_2$ 와 검정 정점  $t_1, t_2$  사이에 두 개의 정점이 서로소인 경로  $P_1, P_2$ 가 존재해서 이 그래프의 모든 정점을 지난다.  $P_1, P_2$ 는 각각  $s_1$ 과  $t_1, s_2$ 와  $t_2$ 를 잇는 경로일 수도 있고,  $s_1$ 과  $t_2, s_2$ 와  $t_1$ 을 잇는 경로일 수도 있다.

**증명** 어떤  $s_i$ 와  $t_j$ 가 같은 열에 있는 경우를 먼저 고려한다(그림 3 (a) 참조). 여기서  $1 \leq i, j \leq 2$ 이다.  $K_2 \times C_n$ 이 정점 대칭 그래프이므로 일반성을 잃지 않고 열  $n$ 에 속한다고 하자. 다른 두 정점  $s_i, t_j$ 은 모두 열 1부터 열  $x$  사이에 속하며, 이 두 정점중 최소한 하나는 열  $x$ 에 속한다고 하자.  $P_1 = HP(s_i, t_j; v_1^1, v_x^2), P_2 = HP(s_i, t_j; v_{x+1}^1, v_n^2)$ 는 우리가 원하는 경로이다. 이제 모든  $s_1, s_2, t_1, t_2$ 가 서로 다른 열에 속하는 경우를 생각한다(그림 3 (b) 참조). 고려하고 있는 그래프가 정점 대칭이므로, 열 1부터 열  $n$ 까지  $s_1, s_2, t_1, t_2$ 가 나타나는 순서는  $s_i, t_j, s_i, t_j$ 이거나 혹은  $s_i, t_j, t_j, s_i$ 이다. 마찬가지로 이유로  $s_j$ 는 열 1에 속한다고 가정한다. 처음 순서로 나타날 때  $s_i$ 이 열  $x$ 에 속한다면  $HP(s_i, t_j; v_1^1, v_{x-1}^2)$ 과  $HP(s_i, t_j; v_x^1, v_n^2)$ 이 우리가 원하는 서로소인 경로이다. 두 번째 순서로 나타날 때도  $t_j$ 이 열  $x$ 에 속한다고 하면, 마찬가지로 방식으로 서로소인 경로를 얻을 수 있다. □

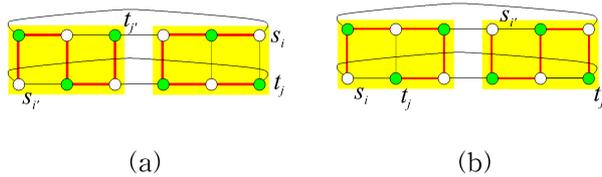


그림 3 보조정리 4 증명의 설명

**주의** 위 보조정리 4에서  $s_1$ 과  $t_1, s_2$ 와  $t_2$ 를 잇는 경로라고 제한할 수 없다.  $K_2 \times C_6$ 에서  $s_1 = v_1^2, s_2 = v_5^2, t_1 = v_4^2, t_2 = v_2^2$ 일 때, 서로소인  $s_1$ 과  $t_1, s_2$ 와  $t_2$ 를 잇는 서로소인 경로는 존재하지 않음을 보일 수 있다. 이 경우 물론  $s_1$ 과  $t_2, s_2$ 와  $t_1$ 을 잇는 경로는 존재한다.

### 3 에지 고장

이 절에서는  $m \times n$  그리드 그래프의 해밀톤 성질을 이용하여 에지 고장이 있는  $m \times n$  DLN이 1-에지 고장 해밀톤 연결된 그래프이며 2-에지 고장 해밀톤 그래프임을 보이고자 한다. 이 논문에서는  $m, n$ 이 모두 짝수인  $m \times n$  DLN을 고려하고 있고,  $n \geq 4$ 임에 유의한다. 고장이 없는  $m \times n$  DLN은 해밀톤 연결된 그래프이다.

**보조정리 5**  $2 \times n$  DLN은 1-에지 고장 해밀톤 연결된 그래프이다. 두 정점  $s, t$ 가 서로 다른 색이면 세로 랩어라운드 에지를 포함하지 않고, 모두 흰색이면 세로 랩어라운드 에지  $(v_{n-1}^1, v_n^2)$ , 모두 검정색이면  $(v_1^2, v_n^1)$ 만을 지나는 해밀톤 경로가 존재한다.

**증명** 에지 고장의 수가 하나 혹은 그 이하인 경우 임의의 두 정점을 잇는 해밀톤 경로가 있음을 보인다. 고장인 에지는 가로 에지이거나 세로 에지이지만, 아래 그림 4 (a)와 같이 동시에 가로 에지  $(v_1^2, v_n^2)$ 과 세로 에지  $(v_1^1, v_2^2)$ 가 고장이라고 가정하고, 임의의 두 정점  $s, t$ 간에 해밀톤 경로가 존재함을 보인다. 가로 에지와 세로 에지는 서로 similar하므로 이 가정이 일반성을 잃지 않는다. 에지 고장인  $2 \times n$  DLN은  $K_2 \times C_n$ 을 스페닝 부그래프로 가지므로,  $s, t$ 가 서로 다른 색을 가지는 경우는 보조정리 3에 의해서 해밀톤 경로를 가진다. 이 해밀톤 경로는 물론 세로 랩어라운드 에지를 포함하지 않는다. 앞으로  $s, t$ 는 서로 같은 색을 가지고 있다고 가정한다.  $s$ 는 열  $i$ 에  $t$ 는 열  $j$ 에 있다고 하고 하자.  $i < j$ 를 가정한다.

*경우 1*  $s, t$ 가 모두 흰색인 경우(즉,  $s, t \in W$ )

두 검정 정점  $v_{n-1}^1, v_n^2$ 을 잇는 에지를 지나는 해밀톤 경로를 설계한다.  $P_1 = HP(s, v_1^1; v_1^1, v_{j-1}^2)$ 라고 정의하면  $P_1$ 은 1열에서  $j-1$ 열 사이의 모든 정점을 지나면서  $s$ 와  $v_1^1$ 을 잇는 경로가 된다.  $j \neq n$ 인 경우는 그림 4 (b)와 같이  $P_2 = HP(t, v_{n-1}^1; v_j^1, v_{n-1}^2) + (v_{n-1}^1, v_n^2) + (v_n^2, v_n^1)$ 이라고 두면  $P = P_1 + P_2 + (v_1^1, v_n^1)$ 은 해밀톤 경로가 된다.  $j = n$ 인 경우는  $P_1$ 이  $(v_{n-1}^1, v_{n-1}^2)$ 을 지나므로 그림 4 (c)와 같이  $P = P_1 - (v_{n-1}^1, v_{n-1}^2) + (v_{n-1}^1, v_n^2) + (v_n^2, v_{n-1}^2) + (v_1^1, v_n^1)$ 은 해밀톤 경로이다.

*경우 2*  $s, t$ 가 모두 검정색인 경우(즉,  $s, t \in B$ )

두 흰색 정점  $v_1^2, v_n^1$ 을 잇는 에지를 지나는 해밀톤 경로를 설계한다. 그림 4 (d)와 같이  $HP(s, v_1^2; v_1^2, v_{j-1}^1) + (v_1^2, v_n^1) + HP(t, v_n^1; v_j^1, v_n^2)$ 은 해밀톤 경로이다.  $\square$

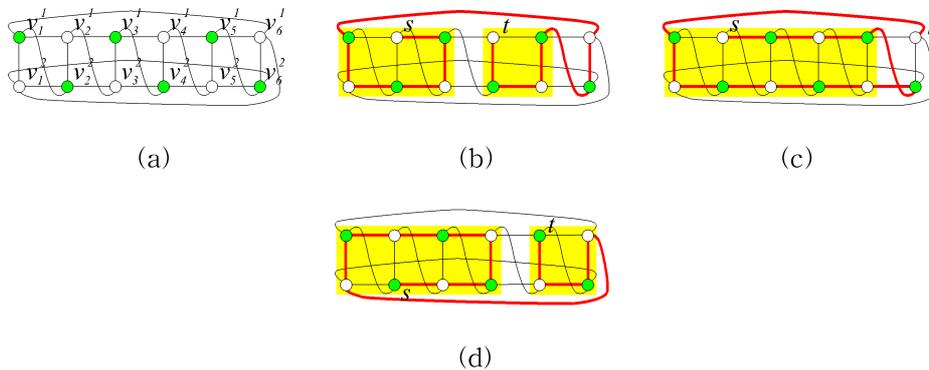


그림 4 보조정리 5 증명의 설명

**정리 1**  $m \times n$  DLN은 1-에지 고장 해밀톤 연결된 그래프이다. 두 정점  $s, t$ 가 서로 다른

색이면 세로 랩어라운드 에지를 포함하지 않고, 모두 흰색이면 세로 랩어라운드 에지  $(v_n^m, v_{n-1}^1)$ , 모두 검정색이면  $(v_1^m, v_n^1)$ 만을 지나는 해밀톤 경로가 존재한다.

**증명**  $m$ 에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다.  $m=2$ 인 경우는 보조정리 5에 의하여 성립하므로  $m \geq 4$ 이라고 가정한다. 그림 5(a)와 같이 두 에지  $(v_1^1, v_2^m)$ ,  $(v_1^2, v_n^2)$ 이 고장이라고 생각하고, 임의의 두 정점  $s, t$ 를 잇는 해밀톤 경로가 존재함을 보인다.  $s, t$ 가 서로 다른 색을 가지고 있으면 보조정리 1 (a)에 의해서 그 둘을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다.  $s, t$ 가 서로 같은 색을 가지고 있다고 가정한다. 행 1부터 행  $m-2$ 에 속하는 정점의 집합을  $X$ , 행  $m-1, m$ 에 속하는 정점의 집합을  $Y$ 라고 하자.

*경우 1*  $s, t \in X$

$s, t \in W$ 인 경우를 먼저 생각한다(그림 5 (b) 참조).  $m-2 \times n$  DLN은  $s, t$ 를 잇는 해밀톤 경로  $P_1$ 을 가지고, 그 경로는  $(v_{n-1}^1, v_n^{m-2})$ 을 지난다.  $P_1$ 에 속한 에지는  $(v_{n-1}^1, v_n^{m-2})$ 을 제외하면 모두  $m \times n$  DLN의 에지이기도 하다. 따라서  $P_2 = P_1 - (v_{n-1}^1, v_n^{m-2}) + (v_{n-1}^1, v_n^m) + (v_n^m, v_n^{m-1}) + (v_n^{m-1}, v_n^{m-2})$ 는  $m \times n$  DLN에서  $s, t$ 를 잇는 경로이다. 이 경로를 이용하여 다음과 같이 정의하면  $s, t$ 를 잇는 해밀톤 경로가 된다:  $P = P_2 - (v_n^m, v_n^{m-1}) + HP(v_n^m, v_n^{m-1}; v_1^{m-1}, v_n^m)$ .  $s, t \in B$ 인 경우도 마찬가지로 그림 5 (c)와 같이  $m-2 \times n$  DLN의  $s, t$ 를 잇는 해밀톤 경로  $P_1'$ 을 이용하여  $P_2' = P_1' - (v_1^{m-2}, v_n^1) + (v_1^{m-2}, v_1^{m-1}) + (v_1^{m-1}, v_1^m) + (v_1^m, v_n^1)$ 라고 하면 원하는 해밀톤 경로는  $P' = P_2' - (v_1^{m-1}, v_1^m) + HP(v_1^{m-1}, v_1^m; v_1^{m-1}, v_n^m)$ 이다.

*경우 2*  $s, t \in Y$

$s, t \in W$ 인 경우를 먼저 고려한다(그림 5 (d) 참조).  $m-2 \times n$  DLN에서  $s' = v_{n-1}^1$ 과  $t' = v_n^{m-2}$ 을 잇는 해밀톤 경로를  $P_1$ 이라고 하자. 양끝 정점이 서로 다른 색을 가지고 있으므로  $P_1$ 은 세로 랩어라운드 에지를 포함하지 않는다.  $s'' = v_n^m, t'' = v_{n-1}^{m-1}$ 이고  $P_2 = P_1 + (s', s') + (t', t')$ 이라고 하면,  $P_2$ 의 양끝 정점은  $s'', t''$ 으로 모두 검정 정점이다. 보조정리 4에 의하면  $P_2$ 의 양끝 정점과  $s, t$ 를 잇는 서로소인 경로가 존재하는데, 이 경로는  $P_2$ 와 함께  $s, t$ 를 잇는 해밀톤 경로가 된다.  $s, t \in B$ 인 경우는 색이 서로 다른 두 정점  $v_n^1, v_n^{m-2}$ 을 잇는  $m-2 \times n$  DLN의 해밀톤 경로를  $P_1'$ 이라 하고,  $P_2' = P_1' + (v_n^1, v_n^m) + (v_n^{m-2}, v_n^{m-1})$ 이라고 하자(그림 5 (e) 참조). 보조정리 4를 이용하여  $P_2'$ 의 양끝 정점과  $s, t$ 를 잇는 서로소인 경로는  $P_2'$ 와 함께 해밀톤 경로가 된다.

*경우 3*  $s \in X, t \in Y$

$s, t \in W$ 인 경우를 먼저 고려한다(그림 5 (f) 참조).  $s' = v_{n-1}^1, t' = v_n^m$ 은 모두 검정 정점

으로  $s$ ,  $t$ 와 서로 색이 다르므로  $P_1 = HP(s, s'; v_1^1, v_n^{m-2})$ 과  $P_2 = HP(t, t'; v_1^{m-1}, v_n^m)$ 이 존재한다.  $P = P_1 + P_2 + (s', t')$ 은  $s$ ,  $t$ 를 잇는 해밀톤 경로이다.  $s, t \in B$ 인 경우는 그림 5 (g)와 같이  $P' = HP(s, v_n^1; v_1^1, v_n^{m-2}) + HP(t, v_1^m; v_1^{m-1}, v_n^m) + (v_1^m, v_1^1)$ 이 해밀톤 경로이다.  $\square$

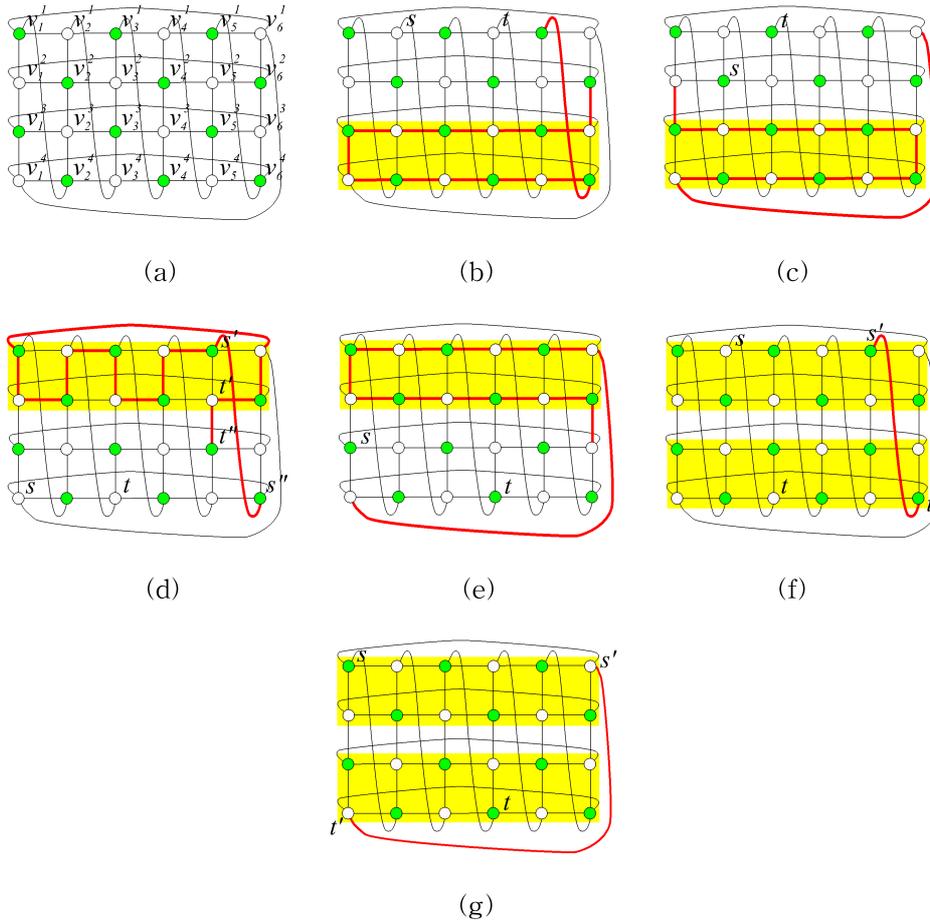


그림 5 정리 1 증명의 설명

**정리 2**  $m \times n$  DLN은 2-에지 고장 해밀톤 그래프이다.

**증명** 에지 고장의 수가 1 이하인 경우는 정리 1에 의해서  $m \times n$  DLN이 해밀톤 연결되어 있고, 따라서 해밀톤 사이클을 가진다. 에지 고장의 수가 2라고 가정한다. 두 고장 에지가 모두 가로 에지인 경우는 세로 에지만으로 해밀톤 사이클을 이루므로, 고장 에지중 적어도 하나는 세로 에지인 경우를 고려한다. 일반성을 잃지 않고 세로 에지  $(v_1^m, v_1^1)$ 이 고장이라고 가정한다.

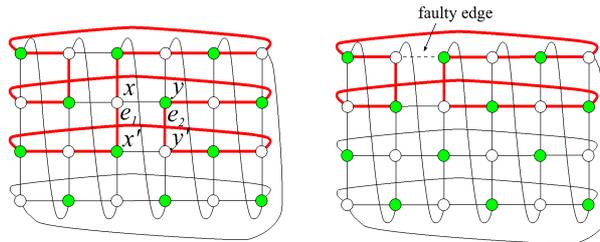
경우 1 고장인 에지가 모두 세로 에지인 경우(그림 6 (a) 참조)  
 각 행에 속한 가로 에지는 길이  $n$ 인 사이클을 이룬다. 행 1부터 행  $i < m$ 까지 각 행에 속한 사이클을 한 개의 사이클  $C_i$ 로 합병할 수 있고 행  $i$ 에 속한 가로 에지를 적어도  $n-1$

개 포함한다고 가정한 다음, 행  $i+1$ 에 있는 사이클까지 합병할 수 있음을 보인다. 행  $i$ 와 행  $i+1$ 을 잇는 에지 중에서 아래 조건을 모두 만족하는 에지  $e_1, e_2$ 를 찾는다.

- (i)  $e_1, e_2$ 는 서로 인접한 열에 속한다. 열  $j$ 는  $j+1$ 과 인접하고, 열  $n$ 은 열 1과 서로 인접하다고 생각한다.
- (ii) 행  $i$ 에 속하는  $e_1$ 과  $e_2$ 의 양끝 정점을 잇는 에지는  $C_i$ 에 포함된다.

위의 조건을 만족하는  $e_1, e_2$ 가 존재하는 것은 행  $i$ 와 행  $i+1$ 을 잇는 에지는 최대 하나가 고장일 수 있고  $C_i$ 는 행  $i$ 에 속한 가로 에지를  $n-1$ 개 이상 포함하기 때문이다.  $e_1$ 과  $e_2$ 의 양끝 정점으로 행  $i$ 에 속하는 것을  $x, y$ 라고 하고 행  $i+1$ 에 속하는 것을  $x', y'$ 이라고 하자. 행 1부터 행  $i+1$ 까지 합병된 사이클  $C_{i+1} = C_i + X - (x, y) - (x', y') + (x, x') + (y, y')$ 이고, 이것은 행  $i+1$ 에 있는 가로 에지를  $n-1$ 개 포함한다. 여기서  $X$ 는 행  $i+1$ 에 속한 가로 에지의 집합이다. 이 과정을 반복하면 해밀톤 사이클  $C_m$ 을 얻을 수 있다.

경우 2 한 개의 가로 에지와 한 개의 세로 에지가 고장인 경우(그림 6 (b) 참조) 고장인 가로 에지를  $(v_j^i, v_{j+1}^i)$ 이라고 하자.  $i' = i \pm 1$ 이고  $1 \leq i' \leq m$ 이라고 하자. 행  $i$ 와  $i'$ 을 지나는 사이클은 행  $i$ 와  $i'$ 에 속한 가로 에지에서  $(v_j^i, v_{j+1}^i), (v_{j'}^{i'}, v_{j'+1}^{i'})$ 을 제거하고  $(v_j^{i'}, v_j^i), (v_{j'+1}^{i'}, v_{j'+1}^i)$ 을 추가함으로써 얻어진다. 나머지 행에 대해서는 위의 경우 1과 같은 과정을 반복함으로써 해밀톤 사이클을 설계할 수 있다. □



(a) (b)  
그림 6 정리 2 증명의 설명

## 4 정점 고장

이 절에서는 정점이 고장인  $m \times n$  DLN의 해밀톤 성질을 고찰한다. 정점이 고장인 경우는 에지 고장과는 달리 해밀톤 경로, 사이클의 길이가 고장인 정점의 수만큼 줄게 된다.

**보조정리 6**  $2 \times n$  DLN은 1-정점 고장 해밀톤 연결된 그래프이다. 고장 정점의 수가 1인 경우에 두 정점  $s, t$ 가 서로 다른 색을 가지면 세로 랩어라운드 에지중에  $(v_{n-1}^1, v_n^2)$ 만을 지나며, 모두 검정색이면 세로 랩어라운드 에지를 지나지 않고, 모두 흰색이면 두 개의 세로

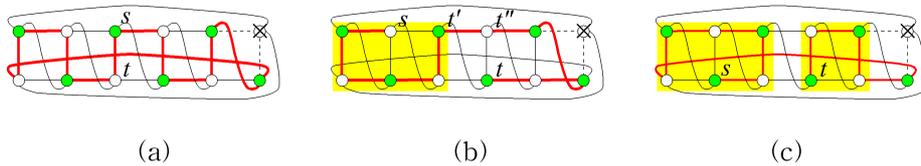
랩어라운드 에지  $(v_1^1, v_2^2)$ ,  $(v_{n-1}^1, v_n^2)$ 을 지나는 해밀톤 경로가 존재한다.

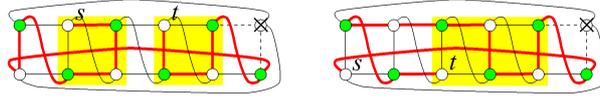
**증명** 고장이 없으면 해밀톤 연결된 그래프이므로 정점 고장의 수가 1이라고 하고, 일반성을 잃지 않고 흰색 정점  $v_n^1$ 이 고장이라고 가정한다.  $s, t$ 는 각각 열  $i, j$ 에 속한다고 하자.

**경우 1**  $s, t$ 가 서로 다른 색을 가질 때( $s \in W, t \in B$  혹은  $s \in B, t \in W$ )  
 $i = j$ 인 경우는 그림 7 (a)와 같이 해밀톤 사이클  $\sum_{1 \leq y < n} (v_y^1, v_y^2) + \sum_{1 \leq y < n-1, j \text{는 홀수}} (v_y^1, v_{y+1}^1) + \sum_{1 \leq y < n-1, j \text{는 짝수}} (v_y^2, v_{y+1}^2) + (v_{n-1}^1, v_n^2) + (v_n^2, v_1^1)$ 에서 에지  $(s, t)$ 를 제거하면  $s, t$ 를 잇는 해밀톤 경로가 된다.  $i < j$ 인 경우를 고려한다.  $j = n$ 이라면, 즉  $t = v_n^2$ 인 검정 정점이라면  $HP(s, v_{n-1}^1; v_1^1, v_{n-1}^2) + (v_{n-1}^1, v_n^2)$ 이 우리가 원하는 해밀톤 경로가 된다.  $j < n$ 인 경우  $t$ 가 행  $x$ 에 속한다고 하고 다른 행을  $x'$ 이라고 하자 (그림 7 (b) 참조).  $t' = v_{j-1}^{x'}$ 은  $t$ 와 같은 색을 가지고  $s$ 와는 다른 색을 가진다.  $t'' = v_j^{x'}$ 이라고 하면, 해밀톤 경로는 다음과 같다:  $HP(s, t'; v_1^1, v_{j-1}^2) + (t', t'') + \sum_{j \leq y < n-1} (v_y^1, v_{y+1}^1) + (v_{n-1}^1, v_n^2) + (v_n^2, v_{n-1}^2) + \sum_{j \leq y < n-1} (v_y^2, v_{y+1}^2)$ .

**경우 2**  $s, t \in B$   
 $i < j$ 라고 하자.  $j = n$ 이라면  $HP(s, v_1^2; v_1^1, v_{n-1}^2) + (v_1^2, v_n^2)$ 이  $s, t$ 를 잇는 해밀톤 경로가 된다.  $j \neq n$ 이라면 그림 7 (c)와 같이  $HP(s, v_1^2; v_1^1, v_{j-1}^2) + (v_1^2, v_n^2) + (v_n^2, v_{n-1}^2) + HP(t, v_{n-1}^1; v_j^1, v_{n-1}^2)$ 이 해밀톤 경로이다.

**경우 3**  $s, t \in W$   
 $i < j$ 라고 하자.  $j \neq n$ 이다.  $i \neq 1$ 인 경우는 그림 7 (d)와 같이  $HP(s, v_2^2; v_2^1, v_{j-1}^2) + (v_2^2, v_1^2) + (v_1^2, v_1^1) + (v_1^1, v_n^2) + (v_n^2, v_{n-1}^1) + HP(v_{n-1}^1, t; v_j^1, v_{n-1}^2)$ 이 해밀톤 경로가 된다.  $i = 1$ 인 경우를 고려한다(그림 7 (e) 참조).  $P_1 = (v_1^2, v_n^2) + (v_n^2, v_{n-1}^1) + HP(v_{n-1}^1, t; v_j^1, v_{n-1}^2)$ 라고 하자.  $P_1$ 이 에지  $(v_j^1, v_j^2)$ 를 지나므로  $P_1 - (v_j^1, v_j^2) + \sum_{1 \leq y < j} (v_y^1, v_{y+1}^1) + (v_1^1, v_2^2) + \sum_{2 \leq y < j} (v_y^2, v_{y+1}^2)$ 은 원하는 해밀톤 경로가 된다.  $\square$





(d) (e)

그림 7 보조정리 6 증명의 설명

**정리 3**  $m \times n$  DLN은 1-정점 고장 해밀톤 연결된 그래프이다. 정점 고장의 수가 1인 경우에 두 정점  $s, t$ 가 서로 다른 색을 가질 때에는 한 개의 세로 랩어라운드 에지  $(v_{n-1}^1, v_n^m)$ 을 지나고, 모두 검정색이면 세로 랩어라운드 에지를 지나지 않으며, 모두 흰색이면 두 세로 랩어라운드 에지  $(v_1^1, v_2^m), (v_{n-1}^1, v_n^m)$ 를 지나는 해밀톤 경로가 존재한다.

**증명**  $m$ 에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다.  $v_n^1$ 이 고장인 정점이라고 가정한다.  $m=2$ 인 경우는 보조정리 6에서 보였다. 이 때 행 1부터 행  $m-2$ 에 속하는 정점 집합을  $X$ , 행  $m-1, m$ 에 속하는 정점 집합을  $Y$ 라고 하자.

*경우 1*  $s, t \in X$

$m-2 \times n$  DLN에서  $s, t$ 를 잇는 경로를  $P_1$ 이라고 하자.  $P_1$ 이 세로 랩어라운드 에지를 지나지 않는 경우( $s, t$ 가 모두 검정색인 경우)는 행  $m-2$ 에 속하는 적어도 하나의 에지  $(v_j^{m-2}, v_{j+1}^{m-2})$ 을 지난다. 만약 그렇지 않다면, 행  $m-2$ 에 속한 정점은 모두  $P_1$ 의 중간 정점이 될 수 없어서 모순이다. 보조정리 3에 의해서 행  $m-1, m$ 으로 유도되는 그래프는  $v_j^{m-1}$ 와  $v_{j+1}^{m-1}$ 을 잇는 해밀톤 경로  $P_2$ 를 가지고, 그림 8 (a)와 같이  $P_1 + P_2 - (v_j^{m-2}, v_{j+1}^{m-2}) + (v_j^{m-2}, v_j^{m-1}) + (v_{j+1}^{m-2}, v_{j+1}^{m-1})$ 은 해밀톤 경로가 된다.  $P_1$ 이 세로 랩어라운드 에지  $(v_{n-1}^1, v_n^{m-2})$ 을 지나면 그림 8 (b)와 같이  $P_1 - (v_{n-1}^1, v_n^{m-2}) + (v_{n-1}^1, v_n^m) + HP(v_n^{m-1}, v_n^m, v_1^{m-1}, v_n^m) + (v_n^{m-1}, v_n^{m-2})$ 이 해밀톤 경로가 된다. 마지막으로  $P_1$ 이  $(v_2^{m-2}, v_1^1), (v_n^{m-2}, v_{n-1}^1)$ 을 모두 지나는 경우는 그림 8 (c)와 같이  $P_1 - (v_1^1, v_2^{m-2}) + (v_1^1, v_2^m) + HP(v_2^{m-1}, v_2^m, v_1^{m-1}, v_2^m) + (v_2^{m-1}, v_2^{m-2}) - (v_{n-1}^1, v_n^{m-2}) + (v_{n-1}^1, v_n^m) + HP(v_n^{m-1}, v_n^m, v_3^{m-1}, v_n^m) + (v_n^{m-1}, v_n^{m-2})$ 이 원하는 해밀톤 경로이다.

*경우 2*  $s, t \in Y$

먼저  $s, t$ 가 서로 다른 색을 가지는 경우를 고려한다.  $s, t$ 가 모두 열  $n$ 에 속하지 않는 경우는  $P_1$ 을 행  $m-1, m$ 에 속한 정점으로 유도된 그래프에서  $(v_n^{m-1}, v_n^m)$ 을 지나서  $s, t$ 를 잇는 해밀톤 경로라고 하자.  $P_1$ 은 보조정리 3에 의해서 존재한다. 그리고  $P_2$ 는  $m-2 \times n$  DLN에서  $v_n^{m-2}, v_{n-1}^1$ 을 잇는 해밀톤 경로라고 하자.  $P_2$ 는 세로 랩어라운드 에지를 지나지 않는다. 그러면  $P_1 - (v_n^{m-1}, v_n^m) + P_2 + (v_{n-1}^1, v_n^m) + (v_n^{m-1}, v_n^{m-2})$ 은 원

하는 해밀톤 경로이다.  $s, t$ 가 모두 열  $n$ 에 속하는 경우를 고려한다(그림 8 (d) 참조).  $s = v_n^{m-1}, t = v_n^m$ 이라고 하자.  $HP(s, v_{n-1}^{m-1}, v_{n-1}^2, v_n^{m-1}) + (v_{n-1}^{m-1}, v_{n-1}^m) + (v_{n-1}^m, v_{n-2}^m) + HP(v_{n-2}^m, v_{n-2}^1; v_1^1, v_{n-2}^m) + (v_{n-2}^1, v_{n-1}^1) + (v_{n-1}^1, v_n^m)$ 이 원하는 경로이다.

$s, t \in B$ 인 경우는  $s' = v_2^{m-1}, t' = v_n^{m-1}$ 이라고 하자(그림 8 (e) 참조). 보조정리 4에 의해서 행  $m-1, m$ 에는  $s, t$ 와  $s', t'$ 을 잇는 서로소인 경로  $P_1, P_2$ 가 존재한다.  $P_3$ 를  $m-2 \times n$  DLN에서  $v_2^{m-2}, v_n^{m-2}$ 을 잇는 해밀톤 경로라고 하면,  $P_1 + P_2 + P_3 + (s', v_2^{m-2}) + (t', v_n^{m-2})$ 은 해밀톤 경로이다. 마지막으로  $s, t \in W$ 인 경우는  $s' = v_2^m, t' = v_n^m$ 이라고 하자(그림 8 (f) 참조). 행  $m-1, m$ 에  $s, t$ 와  $s', t'$ 을 잇는 서로소인 경로를  $P_1, P_2$ 라고 하고,  $m-2 \times n$  DLN에서  $v_1^1, v_{n-1}^1$ 을 잇는 해밀톤 경로를  $P_3$ 라고 하면  $P_1 + P_2 + P_3 + (s', v_1^1) + (t', v_{n-1}^1)$ 은 해밀톤 경로가 된다.

### 경우 3 $s \in X, t \in Y$

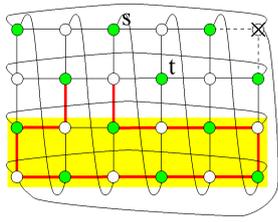
먼저  $s \in B, t \in W$ 인 경우를 고려한다.  $s' = v_1^{m-2}$ 라고 하고,  $P_1$ 을  $m-2 \times n$  DLN에서  $s$ 와  $s'$ 을 잇는 해밀톤 경로라고 하자.  $t$ 가 열  $n$ 에 속하지 않은 경우에 그림 8 (g)와 같이  $P_2 = P_1 - (v_{n-1}^1, v_n^{m-2}) + (v_{n-1}^1, v_n^m) + (v_n^m, v_n^{m-1}) + (v_n^{m-1}, v_n^{m-2})$ 은  $m \times n$  DLN의 경로가 된다.  $P_2 + (s', v_1^{m-1}) + HP(v_1^{m-1}, t, v_1^{m-1}, v_{n-1}^m)$ 은 원하는 해밀톤 경로가 된다.  $t$ 가 열  $n$ 에 속할 때를 고려한다. 우선  $P_1 - (v_{n-1}^1, v_n^{m-2})$ 에서  $s$ 를 포함하는 경로를  $P_{1,1}$ ,  $s'$ 을 포함하는 경로를  $P_{1,2}$ 이라고 하자.  $P_1$ 이  $s$ 에서 출발하여  $(v_{n-1}^1, v_n^{m-2})$ 을 지날 때  $v_n^{m-2}$ 을 먼저 지나느냐 혹은  $v_{n-1}^1$ 을 먼저 지나느냐에 따라 해밀톤 경로를 다르게 설계한다. 먼저 경우는 그림 8 (h)와 같이  $P_{1,1} + (v_n^{m-2}, v_1^{m-2}) + P_{1,2} + (v_{n-1}^1, v_n^m) + HP(v_n^m, t, v_1^{m-1}, v_n^m)$ 이 원하는 해밀톤 경로가 되고, 나중 경우는 그림 9 (i)와 같이  $P_{1,1} + (v_{n-1}^1, v_n^m) + (v_n^m, v_{n-1}^m) + HP(v_{n-1}^m, v_1^{m-1}; v_1^{m-1}, v_{n-1}^m) + (v_1^{m-1}, s') + P_{1,2} + (v_n^{m-2}, t)$ 은 원하는 해밀톤 경로이다.

$s \in W, t \in B$ 인 경우를 고려한다.  $s' = v_2^{m-2}$ 라고 하자.  $m-2 \times n$  DLN에서  $s, s'$ 을 잇는 경로를  $P_1$ 이라고 하자.  $t$ 가 열  $n$ 에 속하지 않은 경우에,  $t$ 는 열  $x$ 에 속하고  $x' = \max\{x, 2\}$ 라고 한다(그림 8 (j) 참조). 그러면  $P_1 - (v_{n-1}^1, v_n^{m-2}) + (v_{n-1}^1, v_n^m) + HP(v_n^m, v_n^{m-1}; v_{x'+1}^{m-1}, v_n^m) + (v_n^{m-1}, v_n^{m-2}) + (s', v_2^{m-1}) + HP(v_2^{m-1}, t, v_1^{m-1}, v_x^m)$ 은 원하는 해밀톤 경로이다.  $t$ 가 열  $n$ 에 속하는 경우는  $s$ 가 열 1부터  $n-2$ 에 속하느냐 혹은 열  $n-1, n$ 에 속하느냐에 따라 다르게 설계한다. 전자의 경우 그림 8 (k)와 같이

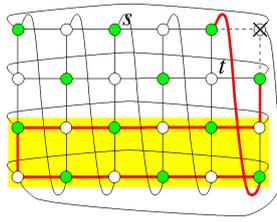
$HP(s, v_{n-2}^m; v_1^1, v_{n-2}^m) + (v_{n-2}^m, v_{n-1}^m) + (v_{n-1}^m, v_{n-1}^{m-1}) + HP(v_{n-1}^{m-1}, v_{n-1}^2; v_{n-1}^2, v_{n-1}^{m-1})$   
 $+ (v_{n-1}^2, v_{n-1}^1) + (v_{n-1}^1, t)$ 가 해밀톤 경로가 된다. 후자의 경우는 그림 8 (l)과 같이  
 $HP(s, v_{n-1}^{m-1}; v_{n-1}^2, v_{n-1}^{m-1}) + (v_{n-1}^{m-1}, v_{n-1}^m) + (v_{n-1}^m, v_{n-2}^m) + HP(v_{n-2}^m, v_{n-2}^1; v_1^1, v_{n-2}^m)$   
 $+ (v_{n-2}^1, v_{n-1}^1) + (v_{n-1}^1, t)$ 는 해밀톤 경로이다.

$s, t \in B$ 인 경우는  $s'$ 을  $s$ 와 다르고 행  $m-2$ 에 있는 검정 정점  $v_j^{m-2}$ 라고 하자(그림 8 (m) 참조).  $m-2 \times n$  DLN에서  $s$ 와  $s'$ 을 잇는 경로를  $P_1$ 이라고 하고, 행  $m-1, m$ 의  $v_j^{m-1}$ 와  $t$ 를 잇는 해밀톤 경로를  $P_2$ 라고 하면,  $P_1 + P_2 + (s', v_j^{m-1})$ 는 원하는 해밀톤 경로가 된다.

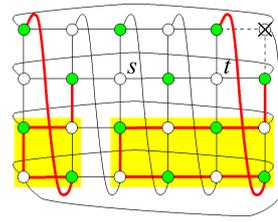
이제  $s, t \in W$ 인 경우를 고려한다. 먼저  $t$ 가 열  $x$ 에 있고,  $x \neq n$ 일 때를 고려한다(그림 8 (n) 참조).  $m-2 \times n$  DLN은  $s$ 와  $s' = v_1^1$ 을 잇는 해밀톤 경로  $P_1$ 을 가진다.  $x' = \max\{x, 2\}$ 일 때,  $P_1 - (v_{n-1}^1, v_n^{m-2}) + (v_{n-1}^1, v_n^m) + HP(v_n^m, v_n^{m-1}; v_{x'+1}^{m-1}, v_n^m) + (v_n^{m-1}, v_n^{m-2}) + (s', v_2^m) + HP(v_2^m, t; v_1^{m-1}, v_x^m)$ 는 해밀톤 경로를 이룬다.  $x = n$ 일 때를 고려하기로 하고,  $s' = v_{n-1}^{m-2}$ 이라고 하자.  $s \neq s'$ 인 경우를 먼저 고려한다(그림 8 (o) 참조).  $m-2 \times n$  DLN에서  $s$ 와  $s'$ 을 잇는 경로를  $P_1$ 이라고 하자.  $P_1$ 은 세로 램어라운드 예지  $(v_1^1, v_2^{m-2}), (v_{n-1}^1, v_n^{m-2})$ 을 지나는데, 일단  $P_1$ 에서  $(v_1^1, v_2^{m-2})$ 을 제거하고  $(v_1^1, v_2^m), (v_2^m, v_2^{m-1}), (v_2^{m-1}, v_2^{m-2})$ 을 추가한 경로를  $P_2$ 라고 하자.  $P_2$ 에서  $(v_{n-1}^1, v_n^{m-2})$ 을 제거하면 두 경로로 나뉘는데,  $s$ 를 포함하는 경로를  $P_{2,1}$ ,  $s'$ 를 포함하는 경로를  $P_{2,2}$ 라고 하자.  $s$ 와 다른  $P_{2,1}$ 의 끝정점이  $v_{n-1}^1$ 인 경우는  $P_3 = P_{2,1} + (v_{n-1}^1, v_n^m) + (v_n^m, v_{n-1}^m) + (v_{n-1}^m, v_{n-1}^{m-1}) + (v_{n-1}^{m-1}, s) + P_{2,2} + (v_n^{m-2}, t)$ 는  $s, t$ 를 잇는 경로가 되는데, 해밀톤 경로를 얻기 위하여  $(v_2^m, v_2^{m-1})$ 를 제거하고  $HP(v_2^m, v_2^{m-1}; v_1^{m-1}, v_2^m)$ 을 추가하며,  $(v_{n-1}^m, v_{n-1}^{m-1})$ 을 제거하고  $HP(v_{n-1}^m, v_{n-1}^{m-1}; v_3^{m-1}, v_{n-1}^m)$ 을 추가한다.  $s$ 와 다른  $P_{2,1}$ 의 끝정점이  $v_n^{m-2}$ 인 경우는 그림 8 (p)와 같이  $P_3 = P_{2,1} + (v_n^{m-2}, s) + P_{2,2} + (v_{n-1}^1, v_n^m) + (v_n^m, t)$ 는  $s, t$ 를 잇는 경로가 되고,  $P_3 - (v_2^{m-1}, v_2^m) + HP(v_2^{m-1}, v_2^m; v_1^{m-1}, v_2^m) - (v_n^m, t) + HP(v_n^m, t; v_3^{m-1}, v_n^m)$ 는 원하는 해밀톤 경로이다. 마지막으로  $s = v_{n-1}^{m-2}$ 인 경우의 해밀톤 경로는 다음과 같이 설계한다(그림 8 (q) 참조):  $HP(s, v_{n-2}^m; v_{n-1}^2, v_{n-2}^m) + (v_{n-2}^m, v_{n-1}^{m-2}) + HP(v_{n-1}^{m-2}, v_{n-1}^{m-2}; v_1^2, v_{n-1}^{m-2}) + (v_{n-1}^{m-2}, v_{n-1}^{m-1}) + (v_{n-1}^{m-1}, v_1^{m-1}) + (v_1^{m-1}, v_1^m) + (v_1^m, v_2^m) + (v_2^m, v_1^1) + (v_1^1, v_2^1) + (v_2^1, v_3^1) + HP(v_3^1, v_{n-2}^1; v_3^1, v_{n-2}^m) + (v_{n-2}^1, v_{n-1}^1) + (v_{n-1}^1, v_n^m) + (v_n^m, v_{n-1}^m) + (v_{n-1}^m, v_{n-1}^{m-1}) + (v_{n-1}^{m-1}, t). \square$



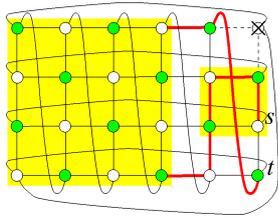
(a)



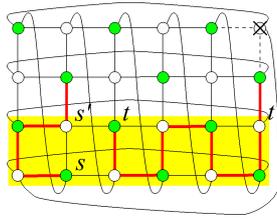
(b)



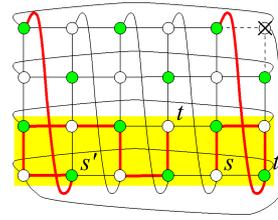
(c)



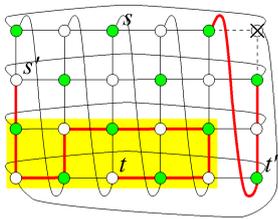
(d)



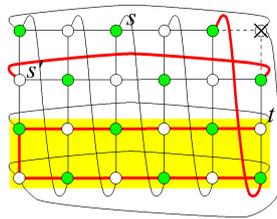
(e)



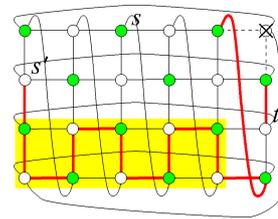
(f)



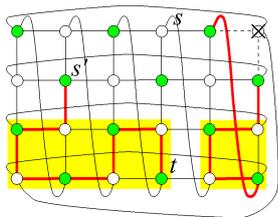
(g)



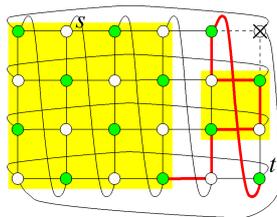
(h)



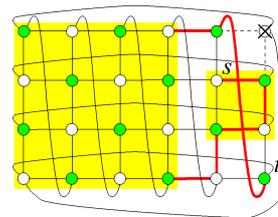
(i)



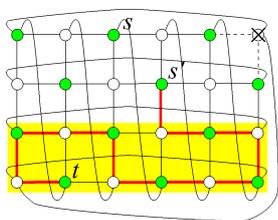
(j)



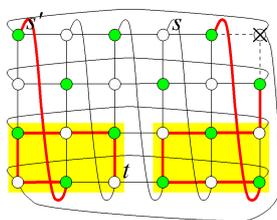
(k)



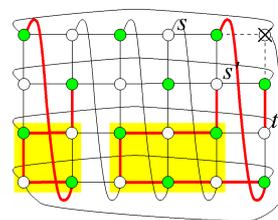
(l)



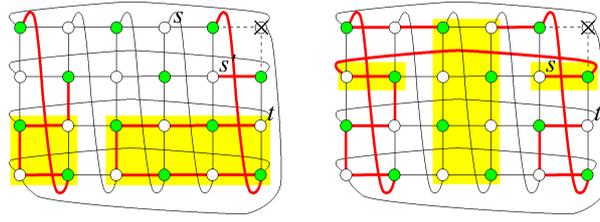
(m)



(n)



(o)



(p) (q)  
그림 8 정리 3 증명의 설명

**보조정리 7**  $2 \times n$  DLN은 2-정점 고장 해밀톤 그래프이다.

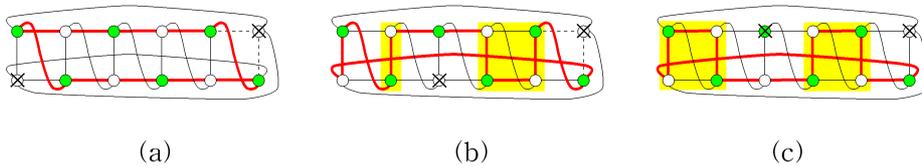
**증명**  $v_n^1$  이외의 고장인 정점을  $w = v_j^i$ 라고 하고, 행  $i$ 와 다른 행을  $i'$ 이라고 하자.

경우 1  $w \in W$

이 경우 두 개의 세로 랩어라운드 에지  $(v_1^1, v_2^2)$ ,  $(v_{n-1}^1, v_n^2)$ 을 지나는 해밀톤 사이클을 설계한다. 먼저  $j = 1$ 일 때는 그림 9 (a)와 같이  $\sum_{1 \leq y < n-1} (v_y^1, v_{y+1}^1) + (v_{n-1}^1, v_n^2) + \sum_{1 < y \leq n-1} (v_y^2, v_{y+1}^2) + (v_1^1, v_2^2)$ 는 해밀톤 사이클이다. 이제  $j \neq 1$ 인 경우를 고려한다(그림 9 (b) 참조).  $j = 2$ 이면  $P_1 = (v_2^2, v_1^1) + (v_1^1, v_2^2)$ 라고 두고  $j \geq 3$ 이면  $P_1 = (v_1^2, v_1^1) + (v_1^1, v_2^2) + HP(v_2^2, v_{j-1}^1; v_2^2, v_{j-1}^1) + (v_{j-1}^1, v_j^1)$ 라고 둔다.  $j = n-1$ 인 경우  $P_2 = (v_{n-1}^1, v_n^2)$ ,  $j < n-1$ 이면  $P_2 = (v_{n-1}^1, v_n^2) + HP(v_{n-1}^1, v_{j+1}^1; v_{j+1}^1, v_{n-1}^1) + (v_j^1, v_{j+1}^1)$ 라고 하자. 그러면  $P_1 + P_2 + (v_1^2, v_n^2)$ 은 해밀톤 사이클을 이룬다.

경우 2  $w \in B$

$j = n$ 이면  $Grid(v_1^1, v_{n-1}^2)$ 은 당연히 해밀톤 사이클을 가진다.  $j \neq n$ 이라고 하자(그림 9 (c) 참조).  $j = 1$ 이면  $P_1 = \emptyset$ ,  $j \neq 1$ 이면  $P_1 = HP(v_1^2, v_{j-1}^1; v_1^2, v_{j-1}^1) + (v_{j-1}^1, v_j^1)$ 라고 한다.  $j = n-1$ 이면  $P_2 = (v_{n-1}^2, v_n^2)$ ,  $j \neq n-1$ 이면  $P_2 = (v_{n-1}^2, v_n^2) + HP(v_{n-1}^2, v_{j+1}^1; v_{j+1}^1, v_{n-1}^2) + (v_j^1, v_{j+1}^1)$ 라고 한다.  $P_1 + P_2 + (v_1^2, v_n^2)$ 은 해밀톤 사이클을 이룬다.  $\square$



(a) (b) (c)  
그림 9 보조정리 7 증명의 설명

**정리 4**  $m \times n$  DLN은 2-정점 고장 해밀톤 그래프이다.

**증명** 고장 정점의 수가 1 이하인 경우는 정리 3에 의해서 성립하므로 고장 정점의 수를 2라고 가정한다.  $m$ 에 대한 수학적 귀납법으로 증명하기로 하는데,  $m=2$ 인 경우는 보조정리 7에 의해서 성립하므로  $m \geq 4$ 인 경우를 고려한다.  $m \times n$  DLN이 정점 대칭이므로  $v_n^1$ 은 고장이라고 가정한다. 행 1과 행  $m$ 을 제외하고 고장 정점을 포함하지 않는 인접한 두 행  $i, i+1$ 이 존재하는 경우를 먼저 고려한다.  $m \times n$  DLN에서 행  $i, i+1$ 을 제거하고 모든  $j, 1 \leq j \leq n$ 에 대해서 에지  $(v_j^{i-1}, v_j^{i+2})$ 를 추가하여 만들어지는 그래프를  $G'$ 이라고 하자.  $G'$ 은  $m-2 \times n$  DLN과 동형이고 고장 정점의 수가 2이므로 해밀톤 사이클  $C$ 를 가진다.

$C$ 가 행  $i-1$ 과  $i+2$ 를 잇는  $t, t > 0$ 개의 에지  $(v_{j_1}^{i-1}, v_{j_1}^{i+2}), (v_{j_2}^{i-1}, v_{j_2}^{i+2}), \dots, (v_{j_t}^{i-1}, v_{j_t}^{i+2})$ 를 지날 때를 먼저 고려한다. 이 때  $j_1 < j_2 < \dots < j_t$ 라고 가정한다. 모든  $s, 1 \leq s \leq t$ 에 대해서  $(v_{j_s}^{i-1}, v_{j_s}^{i+2})$ 를 세 에지  $(v_{j_s}^{i-1}, v_{j_s}^i), (v_{j_s}^i, v_{j_s}^{i+1}), (v_{j_s}^{i+1}, v_{j_s}^{i+2})$ 로 교체하면  $m \times n$  DLN의 사이클  $C'$ 을 얻을 수 있다.  $C'$ 에서  $s < t$ 이면  $(v_{j_s}^i, v_{j_s}^{i+1})$ 를  $HP(v_{j_s}^i, v_{j_s}^{i+1}; v_{j_s}^i, v_{j_{s+1}-1}^{i+1})$ 로 교체하고,  $s = t$ 이면  $(v_{j_t}^i, v_{j_t}^{i+1})$ 를 행  $i, i+1$ 에 있고 열  $j_t, j_t+1, \dots, n$ 이나  $1, 2, j_1-1$ 에 있는 정점으로 유도된 그래프에서  $v_{j_t}^i, v_{j_t}^{i+1}$ 를 잇는 해밀톤 경로로 교체함으로써 우리가 원하는  $m \times n$  DLN의 해밀톤 사이클을 설계할 수 있다.  $C$ 가 행  $i-1$ 과  $i+2$ 를 잇는 에지를 지나지 않는 경우는  $C$ 가 행  $i-1$ 에 속하는 적어도 한 에지  $(v_j^{i-1}, v_{j+1}^{i-1})$ 을 지난다: 만약 그렇지 않다면 행  $i-1$ 에 속하는 어떤 정점도  $C$ 에 속할 수 없다.  $C$ 에서  $(v_j^{i-1}, v_{j+1}^{i-1})$ 을 제거하고  $(v_j^{i-1}, v_j^i), (v_{j+1}^{i-1}, v_{j+1}^i), HP(v_j^i, v_{j+1}^i; v_j^i, v_n^{i+1})$ 을 추가함으로써 해밀톤 사이클을 얻을 수 있다.

고장 정점을 포함하지 않는 인접한 두 행이 마지막 행을 포함하여 행  $m-1, m$ 인 경우도 위와 매우 유사하게 두 행을 제거하고 적절히 에지를 추가하여  $m-2 \times n$  DLN과 동형인 그래프  $G'$ 을 설계함으로써  $G'$ 의 해밀톤 사이클이 추가된 에지를 지나는 경우와 지나지 않는 경우로 나누어 우리가 원하는 해밀톤 사이클을 설계할 수 있다.

이제 고장 정점을 포함하지 않는 인접한 두 행이 존재하지 않는 경우를 고려한다. 이 경우는  $m=4$ 이고  $v_n^1$ 을 제외한 다른 고장 정점은 행 3에 있게 된다. 이 정점을  $v_j^3$ 라고 하자.  $v_j^3$ 가 검정 정점인 경우, 즉  $j$ 가 홀수인 경우를 먼저 고려한다(그림 10 (a) 참조).  $j \neq 1$ 일 때,  $s = v_{j-1}^2$ 과  $t = v_{j+1}^2$ 을 이으면서 행 1과 2에 있는 모든 정점을 지나는 경로  $P$ 를 찾는다. 경로  $P$ 는 보조정리 6에 의해서 존재한다. 정점  $v_{j-1}^2, v_{j+1}^2$ 이 모두 검정 정점임에 유의한다.  $P + (s, v_{j-1}^3) + (v_{j-1}^3, v_{j-1}^4) + (v_{j-1}^4, v_j^4) + (v_j^4, v_{j+1}^4) + (v_{j+1}^4, v_{j+1}^3) + (v_{j+1}^3, v_{j+1}^2)$ 은 사이클을 이루며,  $(v_{j-1}^3, v_{j-1}^4)$ 을  $HP(v_{j-1}^3, v_{j-1}^4; v_1^3, v_{j-1}^4)$ 로 그리고

$(v_{j+1}^A, v_{j+1}^3)$ 을  $HP(v_{j+1}^A, v_{j+1}^3; v_{j+1}^3, v_n^A)$ 으로 교체함으로써 우리가 원하는 해밀톤 사이클을 설계할 수 있다.  $j=1$ 일 때도 마찬가지로 방식으로 설계할 수 있다.

마지막으로  $j$ 가 짝수인 경우, 즉 고장 정점  $v_j^2$ 가 흰색 정점인 경우를 고려한다. 먼저  $j \neq 2, n$ 인 경우를 생각한다. 보조정리 6에 의하면  $2 \times n$  DLN에서 두 흰색 정점  $s = v_{j-1}^2, t = v_{j+1}^2$ 을 잇는 해밀톤 경로는 세로 랩어라운드 에지  $(v_1^1, v_2^2), (v_{n-1}^1, v_n^2)$ 을 지난다. 이 경로에서  $(v_1^1, v_2^2)$ 를  $(v_1^1, v_2^A), (v_2^A, v_2^2), (v_2^2, v_2^2)$ 로 교체하고  $(v_{n-1}^1, v_n^2)$ 을  $(v_{n-1}^1, v_n^A), (v_n^A, v_n^3), (v_n^3, v_n^2)$ 으로 교체하여  $s, t$ 를 잇는 경로  $P$ 를 생성한다.  $j$ 가 홀수일 때의 증명과 마찬가지로,  $P + (s, v_{j-1}^2) + (v_{j-1}^2, v_{j-1}^A) + (v_{j-1}^A, v_j^A) + (v_j^A, v_{j+1}^A) + (v_{j+1}^A, v_{j+1}^3) + (v_{j+1}^3, t)$ 는 사이클을 이루는데, 이 사이클을 확장하여 행 3, 4에 있는 나머지 정점을 모두 지나도록 할 수 있다.  $j=2$ 인 경우는 그림 10 (c)와 같이  $HP(v_3^A, v_{n-2}^A; v_3^1, v_{n-2}^1)$ 를 이용하고,  $j=n$ 인 경우는 그림 10 (d)와 같이  $HP(v_3^1, v_{n-2}^1; v_3^1, v_{n-2}^A)$ 를 이용하여 해밀톤 사이클을 설계할 수 있다.  $\square$

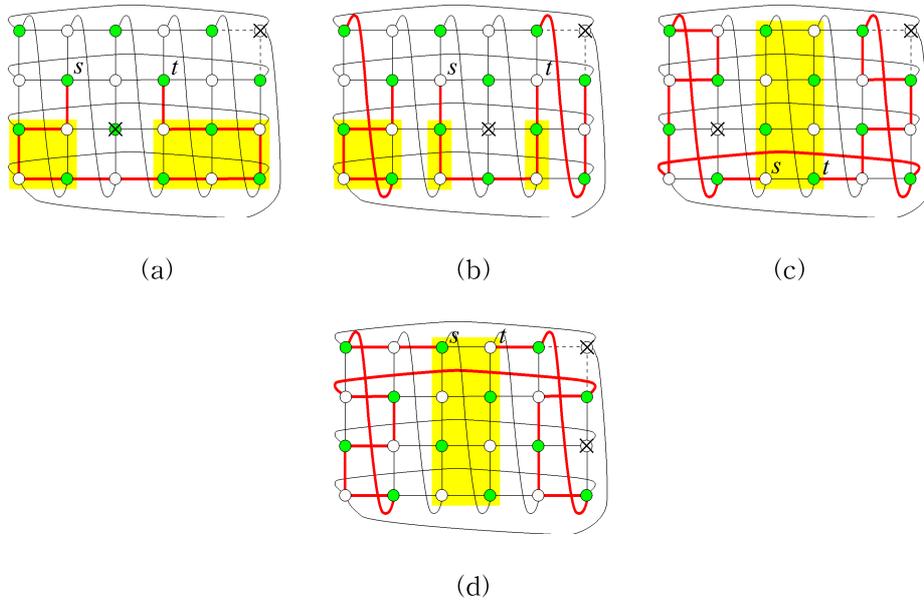


그림 10 정리 4 증명의 설명

## 5 에지와 정점 고장

이 절에서는 정점이나 에지, 혹은 모두에 고장이 발생할 수 있는 경우를 고려한다.

**정리 5** (a)  $m \times n$  DLN은 1-고장 해밀톤 연결된 그래프이다.

(b)  $m \times n$  DLN은 2-고장 해밀톤 그래프이다.

**증명** 정리 1과 3으로부터 (a)는 분명하다. (b)를 증명하기 위해서 고장인 정점과 에지가 각각 하나씩 있다고 가정한다. 나머지 경우는 정리 2와 4로부터 분명하다. 일반성을 잃지 않고 고장인 정점은  $v_n^1$ 이라고 가정한다. 증명을 위하여 에지 고장은 없다고 생각하고 세 개의 해밀톤 사이클  $C_1, C_2, C_3$ 을 제시한다. 이것들이 공통으로 지나는 에지가 없음을 보임으로써 추가로 어떤 에지 하나에 고장이 있더라도 해밀톤 사이클이 존재함을 보인다.  $C_1$ 은 세로 에지를  $m$ 개만 포함한다(그림 11 (a) 참조).  $C_1 = \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j < n} (v_j^i, v_{j+1}^i) - (v_{n-1}^1, v_n^1) + \sum_{1 \leq i < m, i \text{는 홀수}} (v_1^i, v_1^{i+1}) + \sum_{1 \leq i < m, i \text{는 짝수}} (v_n^i, v_n^{i+1}) + (v_{n-1}^1, v_n^m)$ 이다.  $C_2$ 는 가로 에지를  $m-1$ 개만 포함한다(그림 11 (b) 참조).  $C_2 = \sum_{1 < j < n} \sum_{1 \leq i < m} (v_j^i, v_j^{i+1}) + \sum_{1 \leq j < n} (v_j^1, v_{j+1}^m) + \sum_{1 \leq i < m, i \text{는 홀수}} (v_1^i, v_1^{i+1}) + \sum_{1 \leq i < m, i \text{는 짝수}} (v_n^i, v_n^{i+1}) + \sum_{1 < i \leq m} (v_1^i, v_n^i)$ 이라고 하자. 그러면  $C_1$ 과  $C_2$ 에 공통으로 포함되는 에지는  $\sum_{1 \leq i < m, i \text{는 홀수}} (v_1^i, v_1^{i+1}) + \sum_{1 \leq i < m, i \text{는 짝수}} (v_n^i, v_n^{i+1}) + (v_{n-1}^1, v_n^m)$ 으로 모두 세로 에지이다. 이제  $C_1, C_2$ 에 공통으로 포함되는 에지를 포함하지 않는 해밀톤 사이클  $C_3$ 을 다음과 같이 설계한다(그림 11 (c) 참조):  $C_3 = \sum_{3 \leq j \leq n-2} \sum_{1 \leq i < m} (v_j^i, v_j^{i+1}) + \sum_{3 \leq j < n-2, j \text{는 짝수}} (v_j^1, v_{j+1}^1) + \sum_{3 \leq j < n-2, j \text{는 홀수}} (v_j^m, v_{j+1}^m) + \sum_{1 \leq i \leq m} (v_1^i, v_2^i) + (v_2^1, v_3^1) + \sum_{1 \leq i < m, i \text{는 짝수}} (v_2^i, v_2^{i+1}) + (v_{n-2}^1, v_{n-1}^1) + \sum_{1 < i \leq m} (v_{n-1}^i, v_n^i) + \sum_{1 \leq i < m, i \text{는 홀수}} (v_{n-1}^i, v_{n-1}^{i+1}) + \sum_{1 < i \leq m} (v_1^i, v_n^i) + (v_1^1, v_2^m)$ . □

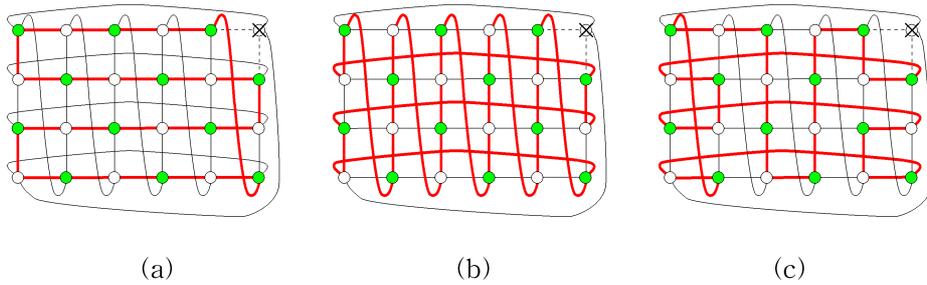


그림 11 정리 5 증명의 설명

## 6 결론

이 논문은 에지나 정점에 고장이 있는 이중 루프 네트워크  $m \times n$  DLN의 해밀톤 성질을 고려하여,  $m$ 과  $n$  ( $n \geq 4$ )이 모두 짝수인 경우에  $m \times n$  DLN은 1-고장 해밀톤 연결된 그래프이고 또한 2-고장 해밀톤 그래프임을 증명하였다.  $m, n$ 이 짝수로 제한되지 않은 경우,

더 나아가서는 일반적인 이중 루프 네트워크의 고장 해밀톤 성질을 밝히는 것은 미해결 문제이다.

## 참고문헌

- [1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, 5th printing, American Elsevier Publishing Co., Inc., 1976.
- [2] C. C. Chen and N. F. Quimpo, "On strongly hamiltonian abelian group graphs," in *Australian Conference on Combinatorial Mathematics (Lecture Notes in Mathematics #884)*, pp. 23-34, 1980.
- [3] S. J. Curran and J. A. Gallian, "Hamiltonian cycles and paths in Cayley graphs and digraphs - a survey," *Discrete Mathematics* **156**, pp. 1-18, 1996.
- [4] A. Itai, C. H. Papadimitriou, and J. L. Czwarcfiter, "Hamiltonian paths in grid graphs," *SIAM J. Comput.* **11(4)**, pp. 676-686, 1982.
- [5] D. A. Reed and R. M. Fujimoto, *Multicomputer Networks: Message-Based Parallel Processing*, The MIT Press, 1987.
- [6] A. Sengupta, "On ring embedding in hypercubes with faulty nodes and links," *Information Processing Letters* **68**, pp. 207-214, 1998.
- [7] T.-Y. Sung, C.-Y. Lin, Y.-C. Chuang, and L.-H. Hsu, "Fault tolerant token ring embedding in double loop networks," *Information Processing Letters* **66**, pp. 201-207, 1998.
- [8] Y.-C. Tseng, S.-H. Chang, and J.-P. Sheu, "Fault-tolerant ring embedding in a star graph with both link and node failures," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems* **8(12)**, pp. 1185-1195, 1997.
- [9] Hee-Chul Kim and Jung-Heum Park, "Fault hamiltonicity of two-dimensional torus networks," in *Proc. 5th Japan-Korea Joint Workshop on Algorithms and Computation WAAC'00*, Tokyo, Japan, pp. 110-117, 2000.