진구간 그래프의 서로소인 경로 커버에 대한 조건

박 정흠

가톨릭대학교 컴퓨터정보공학부
420-743 경기도 부천시 원미구 역곡 2동 산 43-1
j.h.park@catholic.ac.kr
전화 (02) 2164-4366, 팩스 (02) 2164-4777

Conditions for Disjoint Path Coverability in Proper Interval Graphs

Jung-Heum Park

School of Computer Science and Information Engineering
The Catholic University of Korea
Yokkok 2-dong 43-1, Wonmi-gu, Puchon City, Kyonggi-do 420-743
j.h.park@catholic.ac.kr
TEL (02) 2164-4366, FAX (02) 2164-4777

* 본 연구는 2006년도 가톨릭대학교 교비연구비의 지원으로 이루어졌음.

진구간 그래프의 서로소인 경로 커버에 대한 조건

Conditions for Disjoint Path Coverability in Proper Interval Graphs

요약

이 논문에서는 진구간 그래프(proper interval graph)가 각각 일대일, 일대다, 다대다 k-서로소인 경로 커버를 가질 조건을 고찰한다. 진구간 그래프는 $k \geq 2$인 경우, k-연결되어 있는 경우에만 일대일 k-서로소인 경로 커버를 가지며, $k+1$-연결되어 있는 경우에만 일대다 k-서로소인 경로 커버를 가짐을 증명하였다. 그리고 $k \geq 3$일 때 진구간 그래프는 $2k-1$-연결되어 있는 경우에만 (쌍형) 다대다 k-서로소인 경로 커버를 가진다.

키워드: 서로소인 경로 커버, 진구간 그래프, 연결도, 해밀톤 연결된 그래프

Abstract

In this paper, we investigate conditions for proper interval graphs to have k-disjoint path covers of three types each: one-to-one, one-to-many, and many-to-many. It was proved that for $k \geq 2$, a proper interval graph is one-to-one k-disjoint path coverable if and only if the graph is k-connected, and is one-to-many k-disjoint path coverable if and only if the graph is $k+1$-connected. For $k \geq 3$, a proper interval graph is (paired) many-to-many k-disjoint path coverable if and only if the graph is $2k-1$-connected.

Key words: Disjoint path covers, proper interval graphs, connectivity, hamiltonian-connected graph

1 서론

노드들 사이의 라우팅(routing)이나 선형 배열(linear arrays)의 임베딩(embedding) 등과 관련하여 여러 상호연결망(interconnection networks)에서 중요한 문제 중의 하나는 노드가 서로소인 경로(node-disjoint paths)를 찾는 것이다. 노드가 서로소인 경로는 노드들 사이에 효율적인 데이터 라우팅을 위한 병렬 경로로 사용될 수 있다. 또한 노드가 서로소인 경로에서 각 경로는 파이프라인(pipeline) 계산에 이용될 수도 있다. 상호연결망은 자주 그래프로 모델 되는데, 정점과 에지는 각각 노드와 통신 링크에 대응한다. 이 논문에서 노드가 서로소인 경로를 간단히 서로소인 경로라고 부르기로 한다.

서로소인 경로는 다음과 같이 크게 세 가지로 분류할 수 있다: *일대일(one-to-one), 일대다(one-to-many), 다대다(many-to-many)*. 연결도(connectivity)가 k인 그래프 G가 있다고 하자. Menger의 정리를 따르면 G의 서로 다른 두 노드 사이에 k개의 서로소인 경로가 존재한다. 이것은 일대일 부류에 속하게 된다. Menger의 정리를 조금만 확장하면 한 노드에서 서로 다른 k개의 노드 사이에 k개의 서로소인 경로가 존재함을 보일 수 있다. 이것은 일대다 부류에 속한다. 마찬가지로 방식으로 확정하면 임의의 k개의 노드로부터 다른 k개의 노드 사이에 k개의 서로소인 경로를 정의할 수 있다.

세 유형의 서로소인 경로가 그래프 G에 있는 모든 정점을 지나는 것을 생각해 볼 수 있다. *서로소인 경로 커버(disjoint path cover; DPC)*는 그래프의 모든 정점을 지나는 서로소인 경로들의 집합이다. 서로소인 경로 커버 문제는 모든 노드를 완전히 활용(utilization)하는 것이 중요한 응용과 관련된다. 선형 배열의 임베딩에서 커버는 모든 노드가 파이프라인 계산에 참여한다는 것을 의미한다. 서로소인 경로 커버에 대하여 연구된 것들로는, 일대일 경로 커버에 대하여 정점이나 에지에 고장이 없는 재귀원형군(recursive circulant)[1-2], 에지 고장이 있는 하이퍼큐브(hypercubes)[3]에 대한 연구가 있고, 하이퍼큐브형 상호 연결망에 대한 일대다 서로소인 경로 커버[4]와 다대다 서로소인 경로 커버[5-7]가, 그리고 이중 루프 네트워크에서 다대다 서로소인 경로 커버[8]가 발표되어 있다. k개의 경로로 이루어진 일대일 서로소인 경로 커버는 k^**-container*라고도 알려져 있다[2-3].

그래프 G에서 $S \cap T = \varnothing$를 만족하는 k개의 소스(source) $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$와 k개의 싱크(sink) $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_k\}$가 주어져 있을 때, 모든 $1 \le i \le k$에 대하여 소스와 싱크를 연결하는 경로 P_i들의 집합이 서로소이면서 그래프의 모든 정점을 커버하면, 즉 모든 $i \ne j$에 대하여 $V(P_i) \cap V(P_j) = \varnothing$이고 $\cup_{1 \le i \le k} V(P_i) = V(G)$이면 이들 경로들의 집합을 *다대다 k-서로소인 경로 커버(many-to-many k-disjoint path cover)*라고 부른다. 여기서 $V(P_i)$는 경로 P_i에 속한 정점들의 집합이고, $V(G)$는 그래프 G의 정점 집합이다. 소스와 싱크를 *터미널(terminal)*이라고 부른다. 이때 소스 s_i가 항상 싱크 t_i와 짝지어지면 *쌍형 다대다 DPC(paired many-to-many DPC)*라고 부르고, 한 소스가 임의의 한 싱크와 짝지어

질 수 있으면 *비쌍형 다대다 DPC(unpaired many-to-many DPC)*라고 한다. 모든 m-차원 제한된 HL-graph($m \geq 3$)에는 $f+2k \leq m-1$을 만족하는 임의의 $f \geq 0$, $k \geq 1$에 대하여 f-고장 쌍형 다대다 k-DPC가 존재함이 밝혀져 있고[6], 모든 m-차원 제한된 HL-그래프($m \geq 3$)에는 $f+k \leq m-2$를 만족하는 임의의 $f \geq 0$, $k \geq 1$에 대하여 f-고장 비쌍형 다대다 k-DPC가 존재함이 밝혀져 있다[7].

다대다 k-서로소인 경로 커버와 마찬가지 방식으로 *일대다 k-서로소인 경로 커버(one-to-many k-disjoint path cover)*와 *일대일 k-서로소인 경로 커버(one-to-one k-disjoint path cover)*를 정의할 수 있다. 일대다 k-서로소인 경로 커버에서는 하나의 소스 s가 주어지고, (소스를 제외하고) 정점이 서로소인 k개의 경로가 그래프의 모든 정점을 커버하는 것이다. 일대일 k-서로소인 경로 커버는 하나의 소스 s와 하나의 싱크 t가 주어지며, s와 t를 잇은 k개의 경로가 (소스와 싱크를 제외하고) 정점이 서로소이면서 그래프의 모든 정점을 커버한다.

서로소인 경로 커버 문제는 널리 알려진 그래프의 해밀톤 경로(hamiltonian path) 문제와 밀접히 관련되어 있다. 일반적인 그래프에서 임의의 고정된 k에 대하여 일대일, 일대다, 다대다 k-서로소인 경로 커버가 존재하는지를 판별하는 문제는 NP-complete라고 알려져 있다[6]. 이 문제는 모두 주어진 두 정점 사이에 해밀톤 경로가 존재하는지를 판별하는 문제로부터 다항 시간에 변환된다.

일반적인 그래프에서 NP-complete라고 알려진 문제가 있을 때, 그래프 부류를 제한하여 다항 시간 알고리즘을 찾는 시도는 흔하다. 서로소인 경로 커버 문제는 $k=1$로 제한되면 모두 주어진 소스와 싱크를 잇는 해밀톤 경로를 찾는 문제와 동치가 되므로, 해밀톤 문제가 다항 시간에 풀릴 수 있는 그래프 부류를 먼저 고려할 필요가 있다.

진구간 그래프(proper interval graph)의 해밀톤 문제에 대한 연구는 오래전부터 문헌에 발표되고 있다. Bertossi는 1983년 [9]에서 모든 연결된 진구간 그래프는 해밀톤 경로를 가짐을 보였고, 또한 해밀톤 사이클을 가질 조건을 제시하고 해밀톤 사이클을 찾는 $O(n\log n)$ 알고리즘을 설계하였다. Chen 등은 [10]에서 2-연결된 진구간 그래프는 해밀톤 사이클을 가지고, 3-연결되어 있으면 해밀톤 연결되어 있음을 보였다. 그래프에 있는 임의의 두 정점 사이에 해밀톤 경로가 존재하는 그래프를 *해밀톤 연결된(hamiltonian-connected)* 그래프라고 부른다.

수직선 위에 선분들이 n개 있을 때, 선분들을 그래프의 정점에 대응시키고 두 선분이 교차할 때 해당 정점 사이에 에지를 두어 만든 그래프를 *구간 그래프(interval graph)*라고 한다. 특히 어떤 선분도 다른 선분에 완전히 포함되지 않는다면, 다시 말해서 선분을 점들의 집합이라고 할 때 어떤 선분도 다른 선분의 진부분 집합(proper subset)이 되지 않을 때 만들어지는 그래프를 *진구간 그래프(proper interval graph)*라고 한다. 선분들의 길이가 모두 같을 때 만들어지는 구간 그래프를 *단위 구간 그래프(unit interval graph)*라고 부른다.

진구간 그래프 부류와 단위 구간 그래프 부류가 일치한다고 알려져 있다[11]. 진구간 그래프는 구간 그래프 부류에 속한다. 구간 그래프는 *삼각 분할 그래프(triangulaged graph, chordal graph)*이면서, 그것의 complement 그래프가 comparability 그래프인 부류와 일치하는 것으로 알려져 있다[12]. 그래프 G의 *complement 그래프*는 G와 정점의 집합은 같고 G에서 인접하지 않은 정점 쌍을 잇는 에지를 둔 그래프를 말한다.

이 논문에서는 어떤 조건을 만족하는 진구간 그래프가 각각 일대일, 일대다, 다대다 k-서로소인 경로 커버를 가지는지를 고찰하여, 진구간 그래프가 서로소인 경로 커버를 가질 필요충분조건을 제시한다. 이 조건은 모두 연결도라는 개념을 이용한다. 앞으로 서로소인 경로 커버는 DPC라고 간단히 나타내고, 일대일 k-DPC 등과 같이 말하기로 한다. $k \geq 2$에 대하여 연결도가 k 이상인 진구간 그래프는 일대일 k-DPC를 가지며, 연결도가 $k+1$ 이상이면 다대다 k-DPC를 가진다. 그리고 $k \geq 3$인 경우 연결도가 $2k-1$ 이상인 진구간 그래프는 쌍형 다대다 k-DPC를 가짐을 보인다. 이 논문에서 비쌍형 다대다 DPC는 고려하지 않는다. 이후로 다대다 DPC는 쌍형 다대다 DPC를 말한다.

이 논문에서 따로 정의하지 않은 그래프 이론적인 용어는 [13]을 따른다. 이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서는 진구간 그래프에 대하여 본 논문에서 필요한 성질을 살펴본다. 진구간 그래프에서 일대일, 일대다, 다대다 k-서로소인 경로가 존재할 필요충분조건을 3절에서 제시하고, 4절에서 결론을 맺기로 한다.

2 진구간 그래프

진구간 그래프 부류가 단위 구간 그래프 부류와 일치하므로, 정점에 대응되는 선분의 길이는 모두 같다고 가정하기로 한다. 이 선분들의 왼쪽 끝점을 (혹은 오른쪽 끝점을) 오름차순으로 정렬하여 얻은 정점의 순서를 v_1, v_2, …, v_n이라고 하자. 이 순서를 *연속 순서(consecutive ordering)*라고 부른다. 연속 순서를 고려하면 다음을 관찰할 수 있다.

보조 정리 1. v_1, v_2, …, v_n을 진구간 그래프 G에 있는 정점들의 연속 순서라고 하자. 만약 $(v_i,v_j) \in E(G)$, $i<j$이면, 모든 $i<p<j$에 대하여 $(v_i,v_p),(v_p,v_j) \in E(G)$이다. 이 때 $\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j\}$로 유도된 그래프는 완전 그래프(complete graph)를 이룬다.

보조 정리 2. G를 연결되어 있는 진구간 그래프라고 하자.
(a) G는 해밀톤 경로를 가진다[9].
(b) G의 연속 순서 v_1, v_2, …, v_n이 해밀톤 경로를 이룬다.

그래프 G에서 임의의 $k-1$개의 정점을 삭제하더라도 연결되어 있고, 어떤 k개의 정점을 삭제하면 분리될 때 그래프의 *연결도(connectivity)*를 k라고 한다. 완전 그래프에서는 어떤 정점들을 제거하더라도 분리되지 않으므로, 정점의 수가 n개인 완전 그래프 K_n의 연결도는 $n-1$이라고 정의한다. 그리고 연결도가 k 이상인 그래프를 k-*연결된(k*

$-connected$) 그래프라고 말한다.

보조 정리 3. [10] 진구간 그래프 G에 있는 정점들의 연속 순서를 v_1, v_2, …, v_n이라고 하자. G가 $k-$연결되어 있으면 모든 $|i-j| \le k$에 대하여 $(v_i, v_j) \in E(G)$이다. 그 역도 성립한다.

진구간 그래프가 해밀톤 사이클을 가질 조건과 해밀톤 연결되어 있을 조건이 연결도의 관점에서 다음과 같이 알려져 있다.

보조 정리 4. [10] G를 진구간 그래프라고 하자.
(a) $n \ge 3$일 때, G가 2-연결되어 있으면 해밀톤 사이클이 있고 그 역도 성립한다.
(b) $n \ge 4$일 때, G가 3-연결되어 있으면 해밀톤 연결되어 있고 그 역도 성립한다.

3 서로소인 경로 커버

이 절에서는 $k \ge 2$라고 가정하고, 진구간 그래프가 일대일, 일대다, 다대다 k-DPC를 가질 필요충분조건을 고찰한다. $k=1$일 때 일대일, 일대다, 다대다 k-DPC는 모두 소스와 싱크를 잇는 해밀톤 경로가 된다. 먼저 서로소인 경로 커버를 설계할 때 이용하는 기본적인 성질을 소개한다.

보조 정리 5. G를 2-연결된 진구간 그래프라고 하자. 그러면 v_1과 v_2를 잇는 해밀톤 경로가 존재한다.

증명. n이 짝수이면 $(v_1, v_3, v_5, \ldots, v_{n-1}, v_n, v_{n-2}, v_{n-4}, \ldots, v_2)$가 해밀톤 경로가 되고, 홀수이면 $(v_1, v_3, v_5, \ldots, v_n, v_{n-1}, v_{n-3}, v_{n-5}, \ldots, v_2)$가 해밀톤 경로가 된다. ■

3.1 일대일 서로소인 경로 커버

임의의 소스, 싱크에 대해서 일대일 k-DPC가 존재할 필요조건을 유도한다. 이 조건이 진구간 그래프에 대해서 충분조건이 됨을 보이기로 한다.

보조 정리 6. 그래프 G가 임의의 소스와 싱크 사이에 일대일 k-DPC를 가지면, G는 k-연결된 그래프이다.

증명. 임의의 소스와 싱크 사이에 일대일 k-DPC를 가진다면, 두 정점 사이에 (양끝점을 제외하고) 서로소인 경로가 k개 존재한다는 의미이다. Menger의 정리에 의해서 G는 k-연결되어 있다. ■

정리 1. G를 진구간 그래프라고 하고, $k \ge 2$라고 둔다. G가 임의의 소스, 싱크 쌍에 대하

여 일대일 k-DPC를 가질 필요충분조건은 G가 k-연결되어 있다는 것이다.

증명. 필요조건임은 위 보조 정리 6에서 증명하였다. 충분조건이 됨을 보이기로 한다. G를 정점의 수가 n개인 k-연결된 진구간 그래프라고 두고, v_1, v_2, ..., v_n을 G의 연속 순서라고 하자. 보조 정리 3에 의해서 임의의 서로 다른 두 정점 v_i와 v_j 사이에 $|i-j| \le k$이면 v_i와 v_j를 잇는 에지가 존재한다. 이 때 G를 에지의 수가 최소인 그래프라고 가정한다. 즉, v_i와 v_j 사이에 에지가 존재한다면 $|i-j| \le k$이고, 그 역도 성립한다. G에서 일대일 k-DPC를 설계하면 충분하다. 증명은 n에 대한 귀납법이다. 먼저 $n=k+1$인 경우는 G가 완전 그래프와 동형이므로 당연히 임의의 소스, 싱크 쌍에 대해서 일대일 k-DPC가 존재한다. 이제 $n \ge k+2$라고 가정한다.

경우 1. v_1은 터미널이다.
일반성을 잃지 않고 v_1을 소스 s라고 둔다. 먼저 v_2가 터미널이 아닌 경우를 다룬다. v_2를 가상의 소스 s'이라고 두고 $V \backslash v_1$로 유도된 부그래프(induced subgraph) H에서 일대일 k-DPC를 구한다. H에서 s'의 분지수(degree)가 k이므로, 일대일 k-DPC에 있는 k개의 경로는 s'에서 시작하여 각각 $v_3, v_4, \ldots, v_{k+2}$를 지난다. 이들 k개의 경로를 $P_1, P_2, \ldots, P_k$라고 하고, P_i는 v_{i+2}를 지난다고 하자. $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$은 시작 정점을 s'에서 s로 교체하고, P_k는 s에서 시작하여 s', v_{k+2}를 순서로 지나도록 하면 G의 일대일 k-DPC를 얻을 수 있다.

이제 v_2를 터미널, 즉 싱크 t라고 둔다. $P_1=(s,t)$, 그리고 $2 \le i < k$에 대하여 $P_i=(s,v_{i+2},t)$라고 둔다. 마지막으로 P_k는 (s, v_3, Q, t)이다. 여기서 Q는 $k+2<n$인 경우는 $\{\mathrm{v}_{\mathrm{k}+2}, \ldots, \mathrm{v}_{\mathrm{n}}\}$으로 유도된 부그래프에서 v_{k+3}과 v_{k+2}을 잇은 해밀톤 경로이고, 그렇지 않으면 정점 v_{k+2} 하나로 구성된 경로이다. Q는 보조 정리 5에 의하여 존재한다. 이들 P_i들이 일대일 k-DPC를 이룬다.

경우 2. v_1은 터미널이 아니다.
$V \backslash v_1$로 유도된 부그래프 H에서 일대일 k-DPC를 찾는다. 먼저 일대일 k-DPC에는 어떤 에지 (v_i,v_j), $2 \le i,j \le k+1$를 지나는 경로 P_a가 존재함을 주장한다. 만약 그렇지 않다고 하자. 즉, 어떤 경로도 에지 (v_i,v_j), $2 \le i,j \le k+1$를 지나지 않는다고 가정한다. H에서 v_2의 분지수는 k이고, v_2에 인접한 에지 중 (v_2,v_{k+2}) 하나를 제외하고 나머지 모두가 일대일 k-DPC에 포함되지 않으므로, v_2는 터미널일 수밖에 없다. 터미널이 아닌 정점은 인접한 에지 중 정확이 둘이 k-DPC에 포함됨에 유의한다. 그런데 v_2가 터미널이라면 v_2에 인접한 에지 모두가 k-DPC에 포함되어야 하는데, 이것은 가정에 모순이다. 따라서 주장이 증명되었다. 어떤 에지 (v_i,v_j), $2 \le i,j \le k+1$를 지나는 경로 P_a가 존재하므로, 이 에지를 경로 (v_i,v_1,v_j)로 교체하여 P_a가 v_1을 지나도록 수정하면 충분하다. 따라서 정리의 증명이 끝났다. ■

3.2 일대다 서로소인 경로 커버

일대일 서로소인 경로 커버에서와 마찬가지로 일반적인 그래프에서 임의의 소스, 싱크에 대해서 일대다 k-DPC가 존재할 필요조건을 유도한다. 이 조건이 진구간 그래프에 대해서는 충분조건이 됨을 보인다.

보조 정리 7. 임의의 소스와 싱크 k개에 대해서 일대다 k-DPC를 가지는 그래프 G는 완전 그래프 K_{k+1}과 동형이거나 혹은 $k+1$-연결되어 있다.

증명. 정점의 수 $n=k+1$일 때는 자명하다. $n \geq k+2$라고 가정한다. 만약 $k+1$-연결되어 있지 않다고 하자. 그러면 정점 부분 집합 C가 존재하여 $G \backslash C$는 분리되며 $|C| \leq k$를 만족한다. C에 속한 모든 정점을 싱크라고 두고, $G \backslash C$의 한 연결 요소(connected component)에 소스를 둔다. 그러면 소스에서 출발한 경로가 다른 연결 요소에 있는 정점을 지나기 위해서는 반드시 C를 지나야 하므로 일대다 k-DPC는 존재할 수 없다. ■

정리 2. 진구간 그래프 G가 임의의 소스와 k개 싱크에 대해서 일대다 k-DPC를 가질 필요충분조건은 G가 K_{k+1}과 동형이거나 혹은 $k+1$-연결되어 있다는 것이다.

증명. 보조 정리 7에 의해서 충분조건이 됨을 보이기로 한다. G가 K_{k+1}과 동형인 경우는 자명하다. $n \geq k+2$라고 둔다. 증명은 n에 대한 귀납법이다. 정리 1의 증명에서와 같이 G를 에지 수가 최소이면서 $k+1$-연결된 그래프라고 가정한다.

경우 1. 모든 터미널들이 연속적이다. 즉, 어떤 i에 대해서 v_i, v_{i+1}, ..., v_{i+k}가 모두 터미널이다.
$L=\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_{i-1}\}$이라고 두고 $R=\{\mathrm{v}_{i+k+1},\ldots,\mathrm{v}_n\}$이라고 둔다. 먼저 $\{\mathrm{v}_i,\ldots,\mathrm{v}_{i+k}\}$로 유도된 부그래프에서 일대다 k-DPC를 찾는다. 이 k-DPC는 유도된 부그래프에 있는 서로 다른 두 에지 $(v_a,v_{a'})$, $(v_b,v_{b'})$를 포함한다. 이제 $(v_a,v_{a'})$를 지나는 경로 P_a가 L에 속한 모든 정점을 지나도록 수정하고자 한다. $a<a'$임을 가정한다. $|L| \geq 2$인 경우는 Q_a를 L로 유도된 부그래프에서 v_{i-2}와 v_{i-1}을 잇는 해밀톤 경로라고 하고, $|L|=1$인 경우는 Q_a는 v_1 정점 하나로 이루어진 경로라고 둔다. $L \neq \varnothing$인 경우는 P_a에서 에지 $(v_a,v_{a'})$을 $(v_a,Q_a,v_{a'})$으로 교체하면 된다. 마찬가지 방식으로 $(v_b,v_{b'})$를 지나는 경로가 R의 모든 정점을 지나도록 수정할 수 있다.

경우 2. 모든 터미널들이 연속적이지는 않다.
일반성을 잃지 않고 가장 왼쪽에 있는, 즉 정점의 인덱스가 가장 작은 터미널을 싱크 t_1이라고 가정한다. $t_1=v_i$라고 둔다. 가정에 의해서 $v_1,\ldots,v_{i-1}$은 터미널이 아니다. t_1의 오른쪽에 있는 터미널이 아닌 정점들 중 가장 왼쪽에 있는 정점을 v_j라고 하자. 그러면 가정에 의해서 $j \leq i+k$가 성립한다. v_j를 가상의 싱크라고 두고 $\{\mathrm{v}_{i+1},\ldots,\mathrm{v}_n\}$으로 유도된 부그래프에서 일대다 k-DPC를 찾는다. 소스 s와 가상의 싱크 v_j를 잇는 경로를 연장하여 t_1까지

도달하도록 수정하고자 한다. $i=1$인 경우는 v_j 다음으로 t_1을 지나도록 하면 된다. $i \geq 2$인 경우는 v_j 다음으로 v_{i-1}을 거쳐 t_1까지 $\{\mathrm{v_1,\ldots,v_i}\}$로 유도된 부그래프에서 v_{i-1}과 v_i를 잇는 해밀톤 경로를 따라가면 된다. ■

3.3 다대다 서로소인 경로 커버

일반적인 그래프 G에서 임의의 소스, 싱크에 대해서 다대다 k-DPC가 존재하면 $2k-1$-연결되어 있음이 알려져 있다[6]. 이 조건이 $k \geq 3$인 경우는 진구간 그래프에서 충분조건이 됨을 보이고자 한다. 그리고 $k=2$인 경우는 이 조건과 다른 조건 하나를 추가하여 필요충분조건을 유도한다.

정리 3. $k \geq 3$일 때, 진구간 그래프 G가 임의의 소스, 싱크에 대해서 다대다 k-DPC가 존재할 필요충분조건은 G가 $2k-1$-연결된 그래프라는 것이다.

증명. n에 대한 귀납법으로 충분조건이 됨을 증명한다. $n=2k$인 경우는 G가 완전그래프가 되므로 성립한다. $n \geq 2k+1$이라고 가정한다.

경우 1. 모든 터미널들이 연속적이다.
v_i, v_{i+1}, …, v_{i+2k-1}을 모두 터미널이라고 둔다. 터미널들로 유도된 그래프에서 다대다 k-DPC를 찾는다. 다대다 k-DPC 중 한 경로가 $L=\{\mathrm{v_1,\ldots,v_{i-1}}\}$에 속한 모든 정점을 지나도록 수정하고, 다른 경로가 $R=\{\mathrm{v_{i+2k},\ldots,v_n}\}$을 지나도록 수정하고자 한다. v_i와 v_{i+2k-1}이 소스-싱크 쌍이 아닌 경우에는 일반성을 잃지 않고 $s_a=v_i$, $t_b=v_{i+2k-1}$, $a \neq b$라고 둔다. 정리 2의 경우 1 증명과 같은 방식으로 $L \neq \varnothing$라면 에지 (s_a,t_a)를 교체하여 L의 모든 정점을 지나도록 하고, $R \neq \varnothing$라면 에지 (s_b,t_b)를 교체하여 R의 모든 정점을 지나도록 한다. v_i와 v_{i+2k-1}가 소스-싱크 쌍인 경우에는 v_i와 v_{i+2k-1}을 s_1, t_1이라고 둔다. 이 경우는 $L \neq \varnothing$라면 에지 (s_2,t_2)를 교체하여 L을 지나도록 하고, $R \neq \varnothing$라면 에지 (s_3,t_3)을 교체하여 R을 지나도록 수정하면 충분하다.

경우 2. 모든 터미널들이 연속적이지는 않다.
가장 왼쪽에 있는 터미널을 v_i라고 하고, 가장 오른쪽에 있는 터미널을 $v_{i'}$이라고 하자. v_i와 $v_{i'}$ 사이에 있으면서 가장 왼쪽에 있는 터미널이 아닌 정점을 v_j라고 하자. 일반성을 잃지 않고 $j-i \leq i'-j$임을 가정한다. (모든 정점 v_p를 v_{n-p+1}로 번호를 다시 붙이면 이 조건을 만족하게 된다.) 그러면 $j \leq i+2k-2$가 성립한다. 또한 가장 왼쪽에 있는 터미널 v_i를 일반성을 잃지 않고 소스 s_1이라고 둔다. 그러고 나서 v_j를 가상의 소스 $s_1{}'$이라고 두고, $\{\mathrm{v_{i+1},\ldots,v_n}\}$으로 유도된 부그래프에서 다대다 k-DPC를 찾는다. 가상의 소스 v_j와 t_1을 잇는 경로를 확장하여 s_1과 t_1을 잇도록 하며 $L=\{\mathrm{v_1,\ldots,v_{i-1}}\}$에 속한 정점을 모두 지나면 된다. $i=1$이면 s_1 다음에 v_j 이후를 지나도록 하면 된다. $i \geq 2$이면 s_1에서 출발하여, L로 유도된 부그래프에서 s_1과 v_{i-1}을 잇는 해밀톤 경로를 따라 L의 모든 정점을 지난 다음 v_j

이후를 지나도록 한다. ■

정리 4. 진구간 그래프 G가 임의의 소스, 싱크에 대해서 다대다 2-DPC가 존재할 필요충분조건은 (a) G가 3-연결되어 있고, (b) 다음 조건을 만족하는 i가 존재하지 않는다: (i) $i>1$, (ii) $i+3<n$, (iii) $(v_{i-1},v_{i+3})\not\in E(G)$, (iv) $(v_i,v_{i+4})\not\in E(G)$.

증명. (a)가 필요조건임은 [6]에 증명되어 있다. (b)도 필요조건임을 보이기 위해서 만약 위의 네 조건을 만족하는 i가 존재한다고 가정하자. v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}을 순서대로 s_1, s_2, t_2, t_1이라고 두면, 다대다 2-DPC가 존재하지 않음을 보이고자 한다. 이 경우 s_1과 t_1을 잇는 경로는 (s_1,t_1)일 수 밖에 없고 s_2와 t_2를 잇는 경로가 v_i 왼쪽에 있는 정점들과 v_{i+3} 오른쪽에 있는 정점들을 동시에 지날 수는 없다. 따라서 필요조건 증명이 끝났다.

이제 충분조건임을 증명하고자 한다. 먼저 모든 터미널들이 연속적인 경우를 고려한다. 어떤 i에 대해서 v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}가 각각 s_1, s_2, t_2, t_1이면서 동시에 $i>1$이고 $i+3<n$을 만족하는 경우를 제외하면 정리 3 경우 1의 증명과 같은 방식으로 증명할 수 있다. 이제 예외적인 경우를 고려한다. 가정에 의해서 $(v_{i-1},v_{i+3})\in E(G)$이거나 혹은 $(v_i,v_{i+4})\in E(G)$이다. v_i의 왼쪽에 있는 정점들의 집합을 L이라고 하고, v_{i+3} 오른쪽에 있는 정점 집합을 R이라고 하자. 먼저 $(v_{i-1},v_{i+3})\in E(G)$인 경우를 생각한다. s_1-t_1 경로 P_1이 L을 지나고 s_2-t_2 경로 P_2가 R을 지나도록 설계한다. $|L|=1$이면 $P_1=(s_1,v_1,t_1)$, $|L|\geq 2$이면 $P_1=(s_1,Q_1,t_1)$으로 둔다. 여기서 Q_1은 L로 유도된 그래프에서 v_{i-2}와 v_{i-1}을 잇는 해밀톤 경로이다. $|R|=1$이면 $P_2=(s_2,v_n,t_2)$, $|R|\geq 2$이면 $P_1=(s_2,Q_2,t_2)$로 둔다. 여기서 Q_2는 R로 유도된 그래프에서 v_{i+4}와 v_{i+5}을 잇는 해밀톤 경로이다. 남은 $(v_i,v_{i+4})\in E(G)$인 경우는 위의 경우와 대칭적으로 2-DPC를 설계할 수 있다. 이제 모든 터미널들이 연속적이지는 않는 경우를 고려한다. 이 경우는 앞의 정리 3의 경우 2와 정확히 같은 방식으로 증명된다. ■

4 결론

이 논문에서는 임의의 소스, 싱크에 대해서 진구간 그래프가 일대일, 일대다, 다대다 k-DPC를 가질 필요충분조건을 밝혔다. $k\geq 2$에 대하여 연결도가 k 이상인 경우에만 진구간 그래프는 일대일 k-DPC를 가지며, 연결도가 $k+1$ 이상인 경우에만 다대다 k-DPC를 가진다. 그리고 $k\geq 3$일 때 연결도가 $2k-1$ 이상인 경우에만 진구간 그래프는 다대다 k-DPC를 가진다. 다대다 2-DPC에 대한 필요충분조건도 제시하였다. 다대다 2-DPC가 존재할 조건을 제외한 나머지는 모두 일반적인 그래프가 일대일, 일대다, 다대다 k-DPC를 가질 필요조건이 되는데, 그 조건들이 진구간 그래프에서는 충분조건이 되는 점이 흥미롭다.

이 논문에서 제시한 증명을 이용하여, 필요충분조건을 만족하는 진구간 그래프에서 일대일, 일대다, 다대다 k-DPC을 찾는 효율적인 알고리즘을 설계할 수 있다. 진구간 그래프 G

가 주어질 때 구간 표현(interval representation)을 선형시간에 구하는 알고리즘이 발표되어 있는데, 이것을 이용하여 먼저 G의 연속 순서를 구한다. 정리 1-4를 수학적 귀납법으로 증명하였기 때문에, 제시된 증명을 그대로 따라가면서 k-DPC를 구하는 재귀 알고리즘을 설계할 수 있다. 이 때 서로소인 경로 각각은 리스트로 나타낸다. 이 알고리즘들의 시간 복잡도 $T(n)$은 모두 $T(n) \le \max\{T(n-1)+O(n), O(n)\}$을 만족하므로, 따라서 $O(n^2)$이 된다. 물론 이보다 효율적인 구현이 있을 수 있다.

본 연구 결과를 확장하여 구간 그래프에 대한 필요충분조건을 찾는 연구나, 임의의 진구간 그래프에 주어진 소스, 싱크에 대해서 일대일, 일대다, 다대다 k-DPC가 존재하는지를 판별하는 알고리즘을 설계하는 연구는 미해결 과제이다.

참고문헌

[1] J.-H. Park, "One-to-one disjoint path covers in recursive circulants," *Journal of KISS* **30(12)**, pp. 691-698, 2003.

[2] C.-H. Tsai, J.J.M. Tan, and L.-H. Hsu, "The super-connected property of recursive circulant graphs," *Inform. Proc. Lett.* **91(6)**, pp. 293-298, 2004.

[3] C.-H. Chang, C.-K. Lin, H.-M. Huang, and L.-H. Hsu, "The super laceability of the hypercubes," *Inform. Proc. Lett.* **92(1)**, pp. 15-21, 2004.

[4] J.-H. Park, "One-to-many disjoint path covers in a graph with faulty elements," in *Proc. of the International Computing and Combinatorics Conference COCOON 2004*, pp. 392-401, Aug. 2004.

[5] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Many-to-many disjoint path covers in a graph with faulty elements," in *Proc. of the International Symposium on Algorithms and Computation ISAAC 2004*, pp. 742-753, Dec. 2004.

[6] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Many-to-many disjoint path covers in hypercube-like interconnection networks with faulty elements," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems* **17(3)**, pp. 227-240, Mar. 2006.

[7] J.-H. Park, "Unpaired many-to-many disjoint path covers in hypercube-like interconnection networks," *Journal of KISS* **33(10)**, pp. 789-796, 2006.

[8] J.-H. Park, "Many-to-many disjoint path covers in double loop networks," *Journal of KISS* **32(8)**, pp. 426-431, 2005.

[9] A.A. Bertossi, "Finding hamiltonian circuits in proper interval graphs," *Inform. Proc. Lett.* **17**, pp. 97-101, 1983.

[10] C. Chen, C.-C. Chang, G.J. Chang, "Proper interval graphs and the guard problem," *Discrete Mathematics* **170**, pp. 223-230, 1997.

[11] F.S. Roberts, "Indifference graphs," in F. Harary (ed.), *Proof Techniques in Graph Theory*, Academic Press, NY, pp. 139-146, 1969.

[12] M.C. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press,

Inc. 1980.
[13] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, 5th printing, American Elsevier Publishing Co., Inc., 1976.