

재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 의 고장 지름

김 희철¹, 정 호영¹, 박 정흠²

¹한국외국어대학교 컴퓨터 및 정보통신공학부
449-791 경기도 용인군 모현면 왕산리 산 89
hckim@hufs.ac.kr

전화 (031) 330-4267, 팩스 (031) 333-1696

²가톨릭대학교 컴퓨터·전자공학부
420-743 경기도 부천시 원미구 역곡 2동 산 43-1
j.h.park@catholic.ac.kr

전화 (032) 340-3366, 팩스 (032) 340-3777

Fault Diameter of Recursive Circulant $G(2^m, 2^k)$

Hee-Chul Kim¹, Hoyoung Jung¹, and Jung-Heum Park²

¹Computer Science & Information Communications Engineering Division
Hankuk University of Foreign Studies
Wangsan-ri 89, Mohyun-myun, Yongin-gun, Kyonggi-do 449-791
hckim@hufs.ac.kr

TEL (031) 330-4267, FAX (031) 333-1696

²School of Computer Science and Electronic Engineering
The Catholic University of Korea
Yokkok 2-dong 43-1, Wonmi-gu, Puchon City, Kyonggi-do 420-743
j.h.park@catholic.ac.kr

TEL (032) 340-3366, FAX (032) 340-3777

* 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R05-2000-000-00289-0)지원으로 수행되었음.

재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 의 고장 지름

Fault Diameter of Recursive Circulant $G(2^m, 2^k)$

요약

그래프 G 의 고장지름이란 임의의 연결도-1 개 이하의 정점들에 고장이 났을 경우, 모든 두 정점사이의 최단경로 길이의 최대 값을 말한다. 본 논문에서는 $k \geq 3$ 인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 의 고장 지름을 분석한다. $dia_{m,k}$ 를 $G(2^m, 2^k)$ 의 지름이라 하자. $2 \leq m \leq k$ 일 때, $G(2^m, 2^k)$ 의 고장지름은 $2^m - 2$ 이고, $m = k + 1$ 일 때, 고장지름은 $2^k - 1$ 임을 보인다. 그리고 $m > k + 1$ 인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 에서, $m = 1 \pmod{2k}$ 이면 고장지름은 $dia_{m,k} + 1$ 과 같고, $m \neq 1 \pmod{2k}$ 이면 고장지름은 $dia_{m,k} + 2$ 이하임을 보인다.

Abstract

The fault diameter of a graph G is the maximum of lengths of the shortest paths between all two vertices when there are $\chi(G) - 1$ or less faulty vertices, where $\chi(G)$ is connectivity of G . In this paper, we analyze the fault diameter of recursive circulant $G(2^m, 2^k)$ with $k \geq 3$. Let $dia_{m,k}$ denote the diameter of $G(2^m, 2^k)$. We show that if $2 \leq m \leq k$, the fault diameter of $G(2^m, 2^k)$ is equal to $2^m - 2$, and if $m = k + 1$, it is equal to $2^k - 1$. It is also shown that for $m > k + 1$, the fault diameter is equal to $dia_{m,k} + 1$ if $m = 1 \pmod{2k}$; otherwise, it is less than or equal to $dia_{m,k} + 2$.

* 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R05-2000-000-00289-0)지원으로 수행되었음.

1. 서론

다중 컴퓨터시스템에 대한 상호연결망으로 하이퍼큐브, 메시, 토러스, 재귀원형군, 스타그래프 등의 여러 위상 구조에 대하여 연구되어 왔다. 상호연결망은 그래프로 모델링 할 수 있다: 정점은 노드를 나타내고, 에지는 통신 링크를 나타낸다. 상호연결망을 평가하는 여러 척도중 하나가 연결도(connectivity)이다. 연결망을 나타내는 그래프 G 의 연결도가 $\chi(G)$ 라는 것은 G 에서 임의의 $\chi(G) - 1$ 개 혹은 그 이하의 노드에 고장이 발생하더라도 연결망이 분리되지 않으며, 또한 G 를 연결되지 않도록 하게 하는 $\chi(G)$ 개의 고장인 정점들의 집합이 있다는 것을 의미한다. 상호연결망을 평가하는 다른 척도로 지름(diameter)이 있다. 상호연결망의 지름은 모든 두 정점사이의 최단 경로의 길이의 최대 값을 말한다. 지름은 두 정점사이에 메시지를 전달할 때 걸리는 시간과 관계가 있다. 고장이 있는 경우를 고려하는 연결망, 즉 고장허용과 관련한 척도로 고장지름이 있다. G 의 고장지름이란 임의의 $\chi(G) - 1$ 이하의 정점들에 고장이 났을 경우, 모든 두 정점사이의 최단경로 길이의 최대 값을 말한다. 고장인 정점들이 있는 그래프에서의 경로는 고장이 아닌 정점들만 지나가는 것을 말한다. 고장지름과 관련한 주요한 연구는 고장지름이 지름에 비하여 얼마나 증가하는가를 분석하는 것이다. 지름이 3이상인 r -정규(regular) 그래프의 고장지름은 지름+1 이상인데, 하이퍼큐브, cube-connected cycle, 스타그래프, k -ary n -큐브 등의 고장지름은 지름+1인 것으로 알려져 있다[1-5]. 그리고 하이퍼큐브의 변형인 n -차원 twisted cube의 고장지름은 n 의 값에 따라 지름+1 혹은 지름+2이다[6].

본 논문에서는 상호연결망 중 하나인 재귀원형군[7,8]의 고장지름을 분석한다. 재귀원형군 $G(N, d)$ 는 N 개의 정점 $\{v_0, v_1, \dots, v_{N-1}\}$ 을 가지고 있고, $s + d^i = t \pmod{N}$ 을 만족하는 정수 i ($0 \leq i \leq \lceil \log_d N \rceil - 1$)가 존재하면 두 노드 v_s, v_t 사이의 에지 (v_s, v_t) 가 있는 그래프이다[7]. 그림 1은 재귀원형군 $G(16, 4)$ 와 $G(32, 4)$ 를 보여준다. 특히 $N = 2^m$, $d = 4$ 일 경우, 즉 재귀원형군 $G(2^m, 2^2)$ 은 하이퍼큐브와 분지수와 정점의 수가 같으면서 지름 등 여러 척도에서 더 좋다. 본 논문에서는 재귀원형군 $k \geq 3$ 인 $G(2^m, 2^k)$ 의 고장지름을 분석한다. $G(2^m, 2^k)$ 의 고장지름에 기존의 연구결과로 $k = 2$, $m \geq 5$ 인 $G(2^m, 2^2)$ 의 고장지름은 지름+1이고[9], $k \geq 3$ 인 $G(2^m, 2^k)$ 의 고장지름은 지름+ $2^k - 1$ 이하인 것으로 알려져 있다[10]. 본 논문에서는 $k \geq 3$ 인 $G(2^m, 2^k)$ 에 대한 고장지름의 결과[10]를 개선한다. 고장지름을 분석하기 위하여 두 정점 사이의 서로소인 경로들의 길이를 이용한다. 그래프에서 두 정점 u, v 사이의 두 경로 P_1, P_2 에 대하여 P_1 상과 P_2 상에 공통으로 있는 정점들이 u 와 v 만 있을 때, 이들 두 경로는 서로 소라고 말한다. 연결도가 δ 인 그래프에서 Menger의 정리에 의하여 모든 두 정점 사이에 δ 개의 서로소인 경로가 존재한다. 연결도가 δ 인 그래프에서 인접하지 않은 모든 두 정점 사이에 길이가 l 이하인 서로 소인 경로들이

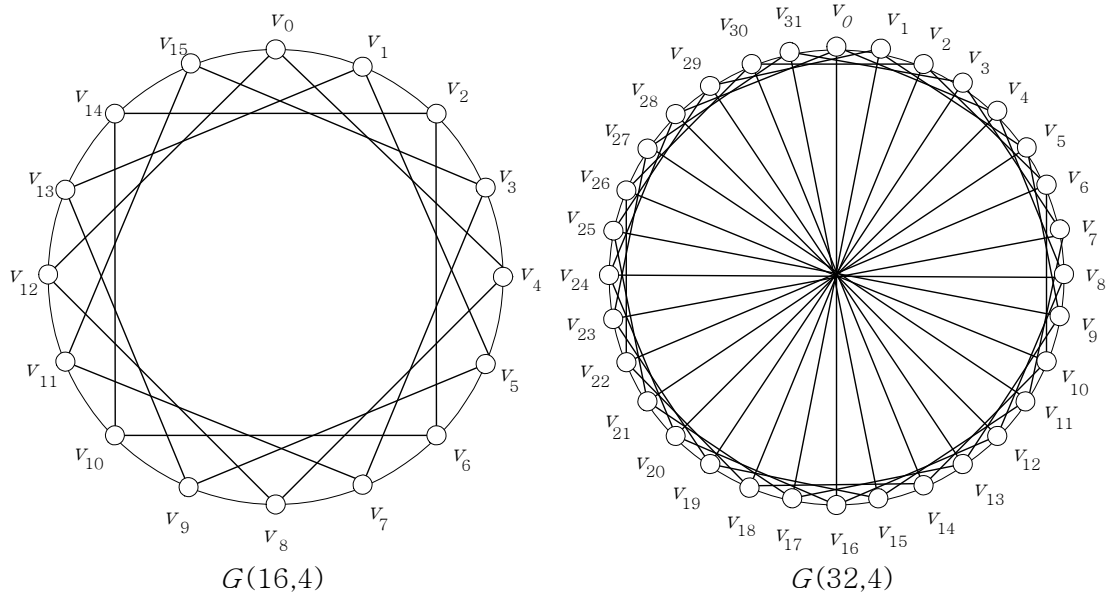


그림 1. 재귀원형군의 예.

존재하면, 고장지름은 l 이하이다. 왜냐하면 두 정점 u, v 사이의 길이가 l 이하인 서로 소인 경로들이 δ 개 있으면, $\delta-1$ 개 이하의 정점들에 고장이 났을 경우 이들 경로 중 하나는 고장이 없고 이 경로의 길이는 l 이하가 되기 때문이다. 이들 경로를 이용하여 $k \geq 3$ 인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 의 고장 지름을 분석한다. $dia_{m,k}$ 를 $G(2^m, 2^k)$ 의 지름이라 하자. $2 \leq m \leq k$ 일 때, $G(2^m, 2^k)$ 의 고장지름은 $2^m - 2$ 이고, $m = k + 1$ 일 때, 고장지름은 $2^k - 1$ 임을 보인다. 그리고 $m > k + 1$ 인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 에서, $m \equiv 1 \pmod{2k}$ 이면 고장지름은 $dia_{m,k} + 1$ 과 같고, $m \not\equiv 1 \pmod{2k}$ 이면 고장지름은 $dia_{m,k} + 2$ 이하임을 보인다.

2장에서는 재귀원형군에 대한 재귀적 성질과 표기를 소개하고, 3장에서는 $G(2^m, 2^k)$ 의 고장지름을 분석하고, 마지막으로 4장에서 결론을 맺는다.

2. 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$

재귀원형군 $G(cd^m, d)$ 의 재귀적 성질에 의하여 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 는 재귀적 구조를 가지고 있다. $m = 0$ 이면 즉, $G(1, 2^k)$ 는 하나의 정점으로 이루어진 그래프이다. $m = 1$ 이면, 즉 $G(2, 2^k)$ 는 K^2 (정점 개수가 2인 완전그래프)와 동형이고, $1 < m \leq k$ 이면 $G(2^m, 2^k)$ 는 길이가 2^m 인 사이클과 동형이고, $m > k$ 이면 $G(2^m, 2^k)$ 는 재귀적인 구조에 의

하여 2^k 개의 $G(2^{m-k}, 2^k)$ 를 이용하여 설계할 수 있다[7]. $G_i(V_i, E_i)$, $0 \leq i \leq 2^k - 1$ 를 $G(2^{m-k}, 2^k)$ 와 동형인 그래프라 하고 $V_i = \{v_0^i, v_1^i, v_2^i, \dots, v_{2^{m-k}-1}^i\}$ 라 하자. 그리고 G_i 는 v_j^i 를 v_j 에 대응시키는 사상(mapping)에 의하여 $G(2^{m-k}, 2^k)$ 와 동형이라 하자. 각 v_j^i 를 다시 $v_{j \cdot 2^k + i}$ 로 레이블한 후, 이들 정점들의 집합을 $\bigcup_{0 \leq i \leq 2^k - 1} V_i$ 라 두고 에지 집합을 $\bigcup_{0 \leq i \leq 2^k - 1} E_i \cup X$ 라 두면 $G(2^m, 2^k)$ 가 정의된다. 여기서 X 는 크기가 1인 에지들의 집합으로 $\{(v_i, v_j) | j + 1 = j' \pmod{2^m}\}$ 이다. 그림 1의 재귀원형군 $G(2^5, 2^2)$ 의 재귀적 구조가 그림 2에 나타나 있다.

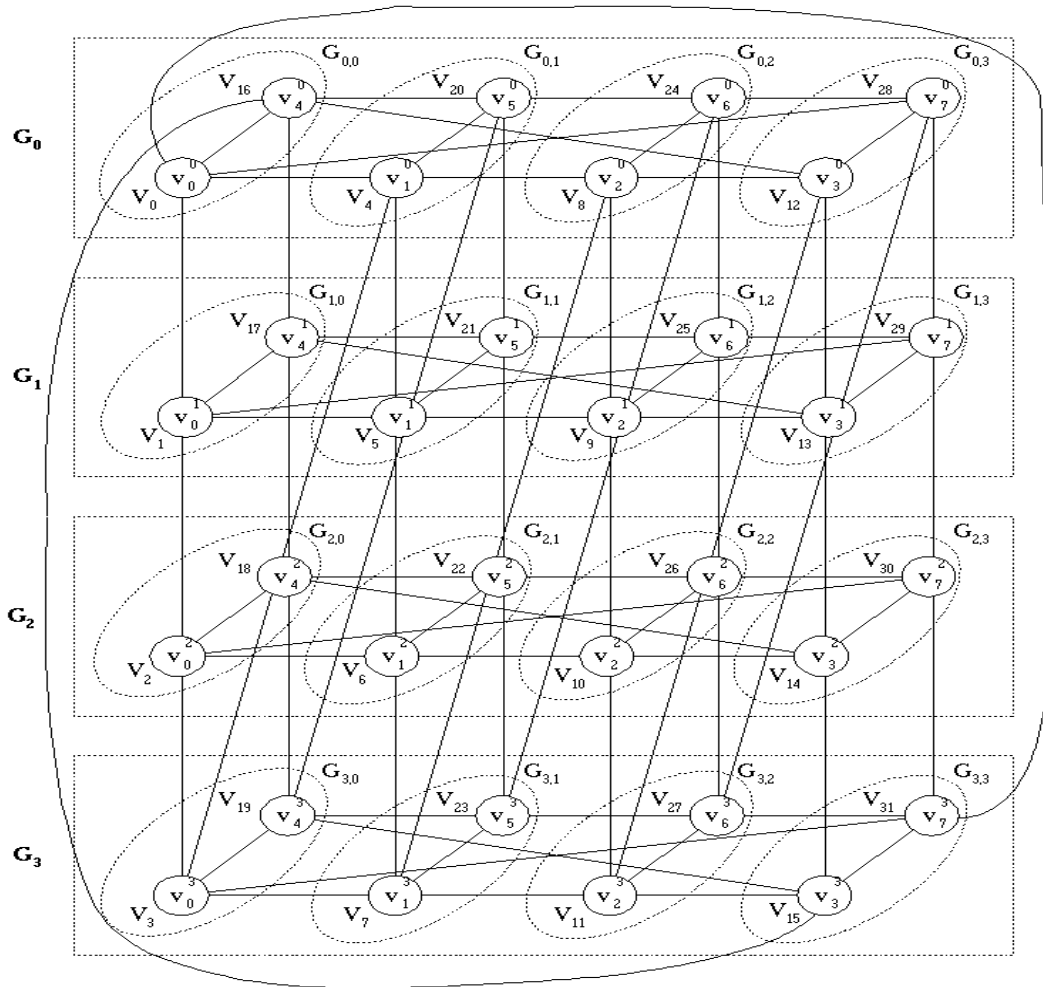


그림 2. 재귀원형군 $G(2^5, 2^2)$ 의 재귀적 구조.

$G(2^m, 2^k)$ 의 재귀적 구조에서 $G(2^{m-k}, 2^k)$ 과 동형인 $G_0, G_1, \dots, G_{2^k-1}$ 에 크기가 1인
 에지가 2^m 개 추가되어 있다. 그리고 $G(2^m, 2^k)$ 의 정점을 표기할 때 단순히 v_j ,
 $0 \leq j \leq 2^m - 1$ 와 같은 형태로 표현할 수도 있고, 혹은 재귀적 구조가 잘 나타나도록 v_j^i ,
 $0 \leq i \leq 2^k - 1, 0 \leq j \leq 2^{m-k} - 1$ 과 같은 형태로 표현할 수도 한다. 앞으로 위의 두 표기를
 혼용하여 사용한다.

$m \geq 2k$ 인 $G(2^m, 2^k)$ 의 각 부재귀원형군 $G_i, 0 \leq i \leq 2^k - 1$ 는 $G(2^{m-k}, 2^k)$ 과 동형이
 고, 또한 G_i 는 재귀적 구조를 가진다. 즉 G_i 는 $G(2^{m-2k}, 2^k)$ 과 동형인 $G_{i,0}, G_{i,1}, G_{i,2}, \dots,$
 $G_{i,2^k-1}$ 에 크기가 2^k 인 에지가 추가되어 있다고 볼 수 있다. $0 \leq i \leq 2^k - 1,$
 $0 \leq i' \leq 2^k - 1$ 에 대하여 $G_{i,i'}$ 의 정점 집합 $V_{i,i'}$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V_{i,i'} = \{v_j \mid j = i \pmod{2^k} \text{이고 } (j-i)/2^k = i' \pmod{2^k}\}.$$

$G(2^5, 2^2)$ 를 $G_{i,i'}$ 에 의한 재귀적 구조에 의하여 나타낸 것은 그림 2에 주어져 있다. 앞으로
 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 의 지름은 $dia_{m,k}$ 로 표기하고, 고장지름은 $fd_{m,k}$ 로 표기한다. 다음은
 $G(2^m, 2^k)$ 의 고장지름을 분석하는데 이용되는 $G(2^m, 2^k)$ 의 지름에 관한 성질이다.

성질 1 [10]

- (1) $m \leq k$ 이면, $dia_{m,k} = 2^{m-1}$ 이고,
- (2) $k < m \leq 2k$ 이면, $dia_{m,k} = dia_{m-k,k} + 2^{k-1} - 1$ 이고, $m > 2k$ 이면 $dia_{m,k} = dia_{m-2k,k} + 2^k - 1$ 이다.

그리고 다음은 $G(2^m, 2^k)$ 의 대칭성과 관련한 성질이다.

성질 2 $m \geq k + 1$ 인 $G(2^m, 2^k)$ 에서 v_0^0 에서 다른 정점 v_j^i 을 보는 것은, $i = 0$ 일 경우 v_0^0 에서
 $v_{2^{m-k}-j}^0$ 를 보는 것과 같고, $i \neq 0$ 일 경우 v_0^0 에서 $v_{2^{m-k}-j-1}^{2^k-i}$ 을 보는 것과 같다.

그래프에서 경로 P 는 일련의 정점들로 나타낸다. 즉 경로 $P = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ 은 각
 $0 \leq i \leq n - 1$ 에 대하여 (v_i, v_{i+1}) 의 에지가 있는 v_0 로부터 v_n 까지의 경로를 나타낸다. P 의
 길이는 n 이고, $|P|$ 로 표기한다. 그리고 경로 P 의 마지막 정점을 제외한 경로는 $P - v_n$ 으로
 나타낸다. 또 경로 P 의 역경로는 $(v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_2, v_1, v_0)$ 를 말한다. 경로 P 상에
 있는 정점들의 집합을 $V(P)$ 로 표기한다.

$m > 2k$ 일 경우 $G(2^m, 2^k)$ 에서 $G(2^{m-2k}, 2^k)$ 과 동형인 각 $G_{i,i'}$ 를 하나의 정점으로 대응
 하여 다음과 같이 정의한 그래프를 $G(2^m, 2^k)$ 의 축약그래프라 부르고 이를 G^c 로 표기한다.

(1) G^c 의 정점은 $G_{i,i}$ 를 나타낸다.

(2) G^c 의 정점 u^c, v^c 에 대하여, u^c 에 대응하는 부재귀원형군과 v^c 에 대응하는 부재귀원형군 사이에 에지가 있으면 G^c 에 에지 (u^c, v^c) 가 있다.

G^c 는 $G(2^{2k}, 2^k)$ 와 동형이다. $G(2^m, 2^k)$ 의 지름에 관한 위의 성질 1로부터 G^c 의 지름은 $2^k - 1$ 이다. G^c 에서 두 정점 u^c 와 v^c 사이의 경로를 $P^c = (u_0^c = u^c, u_1^c, u_2^c, \dots, u_n^c = v^c)$ 라 하자. 축약그래프에서의 경로 P^c 에 의하여, $G(2^m, 2^k)$ 에서의 경로를 정의할 수 있다.

u 를 u^c 에 대응하는 부재귀원형군에 속하는 임의의 정점이라 하고, v 를 v^c 에 대응하는 부재귀원형군에 속하는 임의의 정점이라 하자.

(1) $G(2^m, 2^k)$ 에서 P^c 에 의한 u 로부터의 경로는 $P^c(u)$ 로 표기하며, 다음과 같이 정의된다: $P^c(u) = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$, 여기서 $u_0 = u$ 이고, 모든 $1 \leq i \leq n$ 에 대하여 u_i 은 u_i^c 에 대응하는 부재귀원형군의 정점으로서 u_{i-1} 에 인접하다.

(2) $|P^c| \geq 2$ 일 때, $G(2^m, 2^k)$ 에서 P^c 에 의한 u 와 v 사이의 경로는 $P^c(u, v)$ 로 나타내며 이것은 다음과 같이 정의된다: P^c 를 $l \geq 1$ 인 두 경로 $P_1^c = (u_0^c, u_1^c, u_2^c, \dots, u_l^c)$ 과 $P_2^c = (u_l^c, u_{l+1}^c, u_{l+2}^c, \dots, u_n^c)$ 로 분할한다. 그리고 P_2^c 의 역경로에 의한 v 로부터의 경로에서 마지막 정점을 v' 라 하자. v' 는 u_l^c 에 대응하는 부재귀원형군의 정점이다. 그러면 $P^c(u, v) = (P_1^c(u), P, P_2^c(v'))$ 로 정의된다. 여기서 P 은 u_l^c 에 대응하는 부재귀원형군에서 $P_1^c(u)$ 의 마지막 정점과 v' 사이의 최단경로이다. $P_2^c(v')$ 의 마지막 정점은 v 임을 관찰하라. 그리고 경로 $P^c(u, v)$ 의 길이 $|P^c(u, v)| = |P_1^c(u)| + |P| + |P_2^c(v')| = |P^c| + |P| \leq |P^c| + dia_{m-2k, k}$ 이다.

3. $G(2^m, 2^k)$ 의 고장지름

부재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 의 고장을 분석하기 위하여 인접하지 않은 모든 두 정점 사이에 존재하는 서로소인 경로들의 길이를 고려한다. $G(2^m, 2^k)$ 의 연결도를 $\delta_{m,k}$ 라 하자. 모든 인접하지 않은 두 정점 u, v 사이에 서로소인 $\delta_{m,k}$ 개의 경로들이 있는데, 이들 경로들을 찾아 길이를 분석한다.

$k \geq 2$ 인 $G(2^m, 2^k)$ 의 고장지름은 m 과 k 의 관계에 의하여 여러 가지로 나누어 분석한다. 먼저 $m \leq k$ 인 경우와 $m = k + 1$ 인 경우를 분석한다. $2 \leq m \leq k$ 인 경우, $G(2^m, 2^k)$ 는 길이가 2^m 인 사이클로서 분지수가 2인 그래프이고, $m = k + 1$ 인 경우 $G(2^m, 2^k)$ 는 분지수가

3인 그래프이다. 그림 2의 각 $G_i (0 \leq i \leq 3)$ 는 $m = k+1, k = 2$ 인 $G(2^m, 2^k)$, 즉 $G(2^3, 2^2)$ 이다.

보조정리 1 $2 \leq m \leq k$ 인 채귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 에서 인접하지 않은 모든 두 정점 u, v 사이에 서로소인 경로가 2 개 존재하며 이들 두 경로의 길이는 각각 $2^m - 2$ 이하이다.

증명 이 그래프는 길이가 2^m 인 사이클이므로 보조정리가 성립한다. \square

보조정리 2 $k \geq 3$ 이고 $m = k+1$ 인 채귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 에서 모든 두 정점 u, v 사이에 다음과 같은 서로소인 경로 P_1, P_2, P_3 ($|P_1| \leq |P_2| \leq |P_3|$)이 3개 존재한다.

(1) u 와 v 가 인접하면 $|P_1| = 1, |P_2| = 3, |P_3| \leq 2^k$.

(2) u 와 v 가 인접하지 않으면, $|P_1| \leq 2^{k-1}, |P_2| \leq 2^{k-1} + 1, |P_3| \leq 2^k - 1$.

증명 $G(2^{k+1}, 2^k)$ 는 분지수가 3이고, 성질 1에 의하여 지름 $dia_{k+1,k} = 2^{k-1}$ 이다.

$G(2^m, 2^k)$ 은 정점 대칭이므로 $u = v_0^0$ 라 가정한다. v 를 G_i 의 정점이라 하자. 여기서 G_i 는 K^2 와 동형이다. 그리고 $G(2^m, 2^k)$ 의 대칭성에 의하여 $i \leq 2^{k-1}$ 이라 가정한다. u 와 v 사이에 보조정리의 조건을 만족하는 서로소인 세 경로 P_1, P_2, P_3 을 v 의 위치에 따라 구성한다.

u 와 v 가 인접할 경우는 $v = v_1^0$ 일 경우와 $v = v_0^1$ 일 경우만 고려하면 된다.

$v = v_1^0$ 이면 $P_1 = (v_0^0, v_1^0), P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_1^1, v_0^1), P_3 = (v_0^0, v_1^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_1^0)$. $v = v_0^1$ 이면

$P_1 = (v_0^0, v_0^1), P_2 = (v_0^0, v_1^0, v_1^1, v_0^1), P_3 = (v_0^0, v_1^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_0^{2^k-2}, v_0^{2^k-3}, \dots, v_0^1)$.

다음에서 u 와 v 가 인접하지 않는 경우를 고려한다.

경우 1 $v = v_0^i$ 인 경우

u 와 v 는 인접하지 않으므로, $i \geq 2$ 라 가정한다. $Q_1 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2, \dots, v_0^i), Q_2 = (v_0^0, v_0^1, v_1^1, v_1^2, v_1^3, \dots, v_1^i, v_0^i), Q_3 = (v_0^0, v_1^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_0^{2^k-2}, v_0^{2^k-3}, \dots, v_0^i)$.

Q_1, Q_2, Q_3 이 조건을 만족하는 3 경로임을 보인다. $|Q_1| = i, |Q_2| = i + 2, |Q_3| = 2 + (2^k - 1 - i)$ 이므로 최대 경로는 Q_2 혹은 Q_3 이다. $i = 2^{k-1}$ 이면 $|Q_1| = 2^{k-1} \leq |Q_3| = 2^{k-1} + 1 \leq |Q_2| = 2^{k-1} + 2 < 2^k - 1$ 이다 (여기서 $k \geq 3$).

$i < 2^{k-1}$ 이면 $|Q_1| \leq |Q_2| \leq |Q_3|$ 이고, $|Q_1| < 2^{k-1}, |Q_2| \leq 2^{k-1} + 1, |Q_3| \leq 2^k - 1$ 이다.

경우 2 $v = v_1^i$ 인 경우

u 와 v 는 인접하지 않는 경우를 고려하므로 $1 \leq i \leq 2^{k-1}$ 이다.

$Q_1 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2, \dots, v_0^i, v_1^i), Q_2 = (v_0^0, v_0^1, v_1^1, v_1^2, v_1^3, \dots, v_1^i), Q_3 = (v_0^0, v_1^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_0^{2^k-2}, v_0^{2^k-3}, \dots, v_0^i)$

$v_1^{2^k-2}, v_1^{2^k-3}, \dots, v_1^i$.

$|Q_1| = |Q_2| = i+1, |Q_3| = 1 + (2^k - 1 - i)$ 이다. $i = 2^{k-1}$ 이면 $|Q_3| = 2^{k-1} \leq |Q_1| = |Q_2| = 2^{k-1} + 1$ 이고, $i \leq 2^{k-1} - 1$ 이면 (여기서 $k \geq 3$), $|Q_1| = |Q_2| \leq 2^{k-1} < |Q_3| \leq 2^k - 1$ 이므로 보조정리가 성립한다. \square

따름정리 1 $k \geq 3$ 이고 $m \leq k+1$ 인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 의 고장지름은 다음과 같다:

(1) $m \leq k$ 이면 $fd_{m,k} = 2^m - 2$ 이다.

(2) $m = k+1$ 일 경우 $fd_{m,k} = 2^k - 1$ 이다.

증명 고장지름을 보이기 위하여 인접하지 않은 두 정점 u 와 v 사이에 서로소인 경로들의 길이를 분석한다. $m \leq k$ 이면, $G(2^m, 2^k)$ 는 길이가 2^m 인 사이클이다. 보조정리 1에 의하여 $fd_{m,k} \leq 2^m - 2$ 이다. 그런데 v_1 이 고장이면, v_0 와 v_2 사이에는 경로가 하나 존재하고 그 길이는 $2^m - 2$ 이다. 그러므로 $fd_{m,k} = 2^m - 2$ 이다. $m = k+1$ 일 경우, 보조정리 2에 의하여 $fd_{m,k} \leq 2^k - 1$ 이다. 이제 $fd_{m,k} \geq 2^k - 1$ 임을 보인다. v_1^0, v_0^1 이 고장일 경우, v_0^0 와 v_0^2 사이의 최단경로의 길이는 $2^k - 1$ 이다. 따라서 따름정리가 성립한다. \square

이제 $m > k+1$ 인 경우를 분석한다. 이를 위하여 먼저 분지수가 4인 재귀원형군 $G(2^{2k}, 2^k)$ 에서 두 노드사이에 서로소인 경로의 길이를 분석한다. 이 결과를 이용하여 일반적인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 에서의 서로소인 경로의 길이를 분석한다.

보조정리 3 $k \geq 3$ 인 재귀원형군 $G(2^{2k}, 2^k)$ 에서 모든 두 정점 u, v 사이에 다음을 만족하는 서로소인 4개의 경로가 있다: 각 경로는 길이가 $2^k (= dia_{2k,k} + 1)$ 이하이고, 최단 경로의 길이는 $2^k - 1$ 이하이다.

증명 $G(2^{2k}, 2^k)$ 는 정점 대칭적이므로 $u = v_0^0$ 라 가정한다. 그리고 $v = v_j^i$ 라 하자. $i, j \leq 2^k - 1$ 이다. $G(2^{2k}, 2^k)$ 의 대칭성인 성질 2에 의하여 $i \leq 2^{k-1} - 1$ 이거나 혹은 $i = 2^{k-1}, j < 2^{k-1}$ 이라 가정한다. 성질 1에 의하여 $dia_{2k,k} = 2^k - 1$ 이다. v_0^0 와 v_j^i 사이의 길이가 2^k 이하의 4개의 경로 P_1, P_2, P_3, P_4 를 다음의 11개의 경우로 나누어 구성한다 (그림 3 참조). 경우 1 - 경우 6은 $j \leq 2^{k-1}$ 인 경우들이고, 경우 7 - 경우 11은 $j \geq 2^{k-1} + 1$ 인 경우들이다.

경우 1 $i = 0$ 이고 $1 \leq j \leq 2^{k-1}$

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0, \dots, v_j^0), P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_1^1, v_2^1, v_3^1, \dots, v_j^1, v_j^0),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-2}^0, v_{2^k-3}^0, \dots, v_j^0), P_4 = (v_0^0, v_{2^k-1}^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_1^{2^k-1}, v_2^{2^k-1}, \dots, v_{j-1}^{2^k-1}, v_j^0).$$

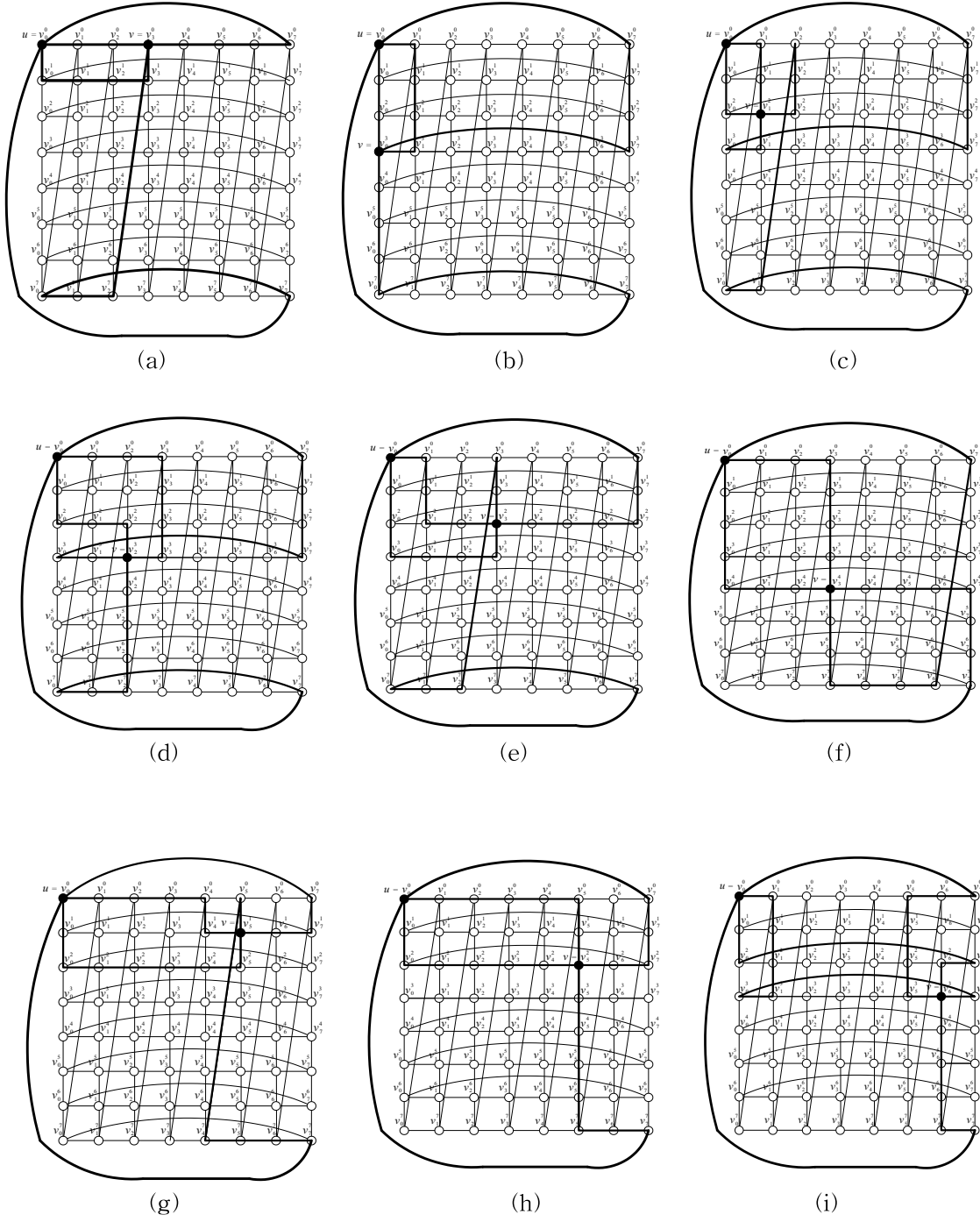


그림 3. u 와 v 사이의 서로 소인 4개의 경로.

그림 3 (a)를 참조하라. $|P_1| = j \leq 2^{k-1}$, $|P_2| = j + 2 \leq 2^{k-1} + 2 \leq 2^k$, $|P_3| = 1 + (2^k - 1 - j) \leq 2^k - 1$ 이고, $|P_4| = 2 + (j - 1) + 1 \leq 2^{k-1} + 2 \leq 2^k$ 이다. 이들 경로는 보조정리의 조건을 만족한다.

경우 2 $1 \leq i \leq 2^{k-1}$ 이고 $j = 0$

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_1^1, v_2^1, v_2^2, \dots, v_1^i, v_0^i), P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2, v_0^3, \dots, v_0^i),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-1}^1, v_{2^k-1}^2, \dots, v_{2^k-1}^i, v_0^i), P_4 = (v_0^0, v_{2^k-1}^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_0^{2^k-2}, v_0^{2^k-3}, \dots, v_0^i).$$

그림 3 (b)를 참조하라. $|P_1| = i + 2 \leq 2^{k-1} + 2 \leq 2^k$, $|P_2| = i \leq 2^{k-1} < 2^k - 1$, $|P_3| = i + 2 \leq 2^{k-1} + 2 \leq 2^k$ 이고, $|P_4| = 2 + 2^k - 1 - i = 2^k + 1 - i \leq 2^k$ 이다.

경우 3 $1 \leq i, j \leq 2^{k-1} - 2$

$i + j \leq 2^k - 4$ 이다.

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0, \dots, v_j^0, v_j^1, v_j^2, \dots, v_j^i), P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2, \dots, v_0^i, v_1^i, v_2^i, \dots, v_j^i),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-1}^1, v_{2^k-1}^2, \dots, v_{2^k-1}^i, v_{2^k-1}^{i+1}, v_0^{i+1}, v_1^{i+1}, v_2^{i+1}, \dots, v_j^{i+1}, v_j^i),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^k-1}^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_1^{2^k-1}, v_2^{2^k-1}, \dots, v_j^{2^k-1}, v_{j+1}^0, v_{j+1}^1, v_{j+1}^2, \dots, v_{j+1}^i, v_j^i).$$

그림 3 (c)를 참조하라. $i + j \leq 2^k - 4$ 이므로, $|P_1| = |P_2| = i + j \leq 2^k - 4$ 이다. 그리고 $|P_3| = 1 + (i + 1) + 1 + j + 1 = i + j + 4 \leq 2^k$ 이고, $|P_4| = 2 + j + 1 + i + 1 = i + j + 4 \leq 2^k$ 이다.

경우 4 $2^{k-1} - 1 \leq i \leq 2^{k-1}$ 이고, $1 \leq j \leq 2^{k-1} - 2$

$k \geq 3$ 이므로, $i \geq 3$ 이다.

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_2^0, \dots, v_j^0, v_{j+1}^0, v_{j+1}^1, v_{j+1}^2, v_{j+1}^3, \dots, v_{j+1}^i, v_j^i),$$

$$P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2, \dots, v_0^{i-1}, v_1^{i-1}, v_2^{i-1}, \dots, v_j^{i-1}, v_j^i),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-1}^1, v_{2^k-1}^2, \dots, v_{2^k-1}^i, v_0^i, v_1^i, v_2^i, \dots, v_j^i),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^k-1}^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_1^{2^k-1}, v_2^{2^k-1}, \dots, v_j^{2^k-1}, v_j^{2^k-2}, v_j^{2^k-3}, \dots, v_j^i).$$

그림 3 (d)를 참조하라. $|P_1| = i + j + 2$, $|P_2| = i + j$, $|P_3| = i + j + 2$ 이고, $|P_4| = 2 + j + (2^k - 1 - i) = 2^k + j + 1 - i$ 이다. $|P_1| = |P_3| \leq 2^k$, $|P_2| \leq 2^k - 2$ 이고 $|P_4| \leq 2^k$ 이다.

경우 5 $i, j = 2^{k-1} - 1$ 혹은 $2^{k-1} - 1 \leq j \leq 2^{k-1}$, $1 \leq i \leq 2^{k-1} - 2$

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_1^1, v_2^1, v_2^2, \dots, v_1^i, v_2^i, v_3^i, \dots, v_j^i),$$

$$P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2, \dots, v_0^i, v_0^{i+1}, v_1^{i+1}, v_2^{i+1}, \dots, v_j^{i+1}, v_j^i),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-1}^1, v_{2^k-1}^2, \dots, v_{2^k-1}^i, v_{2^k-2}^i, v_{2^k-3}^i, \dots, v_j^i),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^k-1}^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_1^{2^k-1}, v_2^{2^k-1}, \dots, v_{j-1}^{2^k-1}, v_j^0, v_j^1, v_j^2, \dots, v_j^i).$$

그림 3 (e)를 참조하라. $|P_1| = i + j$, $|P_2| = i + j + 2$, $|P_3| = 1 + i + (2^k - 1 - j) = 2^k + i - j$ 이고, $|P_4| = 2 + j + i$ 이다.

$$|P_1| \leq 2^k - 2, |P_2| \leq 2^k, |P_3| \leq 2^k \text{이고, } |P_4| \leq 2^k \text{이다.}$$

경우 6 $2^{k-1} - 1 \leq i, j \leq 2^{k-1}$ (단 $i, j = 2^{k-1} - 1$ 는 제외)

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0, \dots, v_j^0, v_j^1, v_j^2, \dots, v_j^i), P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2, \dots, v_0^i, v_1^i, v_2^i, \dots, v_j^i),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-2}^{2^k-1}, v_{2^k-3}^{2^k-1}, v_{2^k-4}^{2^k-1}, \dots, v_j^{2^k-1}, v_j^{2^k-2}, v_j^{2^k-3}, v_j^{2^k-4}, \dots, v_j^i),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^k-1}^{2^k-1}, v_{2^k-1}^{2^k-2}, v_{2^k-1}^{2^k-3}, \dots, v_{2^k-1}^i, v_{2^k-2}^i, v_{2^k-3}^i, \dots, v_j^i).$$

그림 3 (f)를 참조하라. $|P_1| = |P_2| = i + j$ 이다. 그리고 $|P_3| = |P_4| = 1 + (2^k - 1 - j) + (2^k - 1 - i) = 2 \cdot 2^k - (i + j + 1)$ 이다.

$i = 2^{k-1} - 1$, $j = 2^{k-1}$ 혹은 $i = 2^{k-1}$, $j = 2^{k-1} - 1$ 이면, $|P_1|, |P_2| \leq 2^k - 1$ 이고 $|P_3|, |P_4| \leq 2^k$ 이다.

$i = 2^{k-1}$, $j = 2^{k-1}$ 이면, $|P_1|, |P_2| \leq 2^k$ 이고 $|P_3|, |P_4| \leq 2^k - 1$ 이다.

경우 7 $j \geq 2^{k-1} + 1$, $i = 0$

성질 2에 의하여 경우 1과 대칭이므로 성립한다.

경우 8 $j = 2^k - 1$, $1 \leq i \leq 2^{k-1}$

$i = 1$ 이면,

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_1^1, v_1^2, v_0^2, v_{2^k-1}^2, v_{2^k-1}^1), P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_{2^k-1}^1), P_3 = (v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-1}^1),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^k-1}^{2^k-1}, v_{2^k-2}^{2^k-1}, v_{2^k-3}^{2^k-1}, v_{2^k-2}^0, v_{2^k-2}^1, v_{2^k-1}^1).$$

$dia_{2^k, k} = 2^k - 1$ 이고 $k \geq 3$ 이므로, $dia_{2^k, k} \geq 7$ 이다. 위의 4 경로들의 길이는 모두 $2^k - 1$ 이하이다.

$i > 1$ 이면,

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_1^1, v_1^2, v_1^3, \dots, v_1^i, v_0^i, v_{2^k-1}^i), P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2, \dots, v_0^{i-1}, v_{2^k-1}^{i-1}, v_{2^k-1}^i),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-2}^0, v_{2^k-2}^1, v_{2^k-2}^2, \dots, v_{2^k-2}^i, v_{2^k-1}^i),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^k-1}^{2^k-1}, v_{2^k-1}^{2^k-2}, v_{2^k-1}^{2^k-3}, \dots, v_{2^k-1}^{i-1}, v_{2^k-1}^i).$$

이 경우에는 $j - i \geq 2$ 이다. $|P_1| = 3 + i$, $|P_2| = i + 1$, $|P_3| = i + 3$ 이고, $|P_4| = 1 + (2^k - 1 - i) = 2^k - i$ 이다. $k \geq 3$ 이므로 $i + 3 \leq 2^{k-1} + 3 \leq 2^k - 1$ 이다. 그리고 $i > 1$ 이므로 이들 4 경로는 길이가 모두 $2^k - 1$ 보다 같거나 작다.

경우 9 $j \geq 2^{k-1} + 1$, $i + j \leq 2^k - 2$ ($i = 0$ 인 경우와 $j = 2^k - 1$ 인 경우는 제외)

$i = 0$ 인 경우와 $j = 2^k - 1$ 인 경우는 경우 7과 경우 8에서 각각 고려하였다. $j \geq 2^{k-1} + 1$,

$i + j \leq 2^k - 2$ 이므로 $i \leq 2^{k-1} - 3$ 이다. 그러므로 $i \leq j - 4$ 이다.

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_2^0, \dots, v_{j-1}^0, v_{j-1}^1, v_{j-1}^2, \dots, v_{j-1}^i, v_j^i),$$

$$P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2, \dots, v_0^i, v_0^{i+1}, v_1^{i+1}, v_2^{i+1}, \dots, v_j^{i+1}, v_j^i),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-1}^1, v_{2^k-1}^2, \dots, v_{2^k-1}^i, v_{2^k-2}^i, v_{2^k-3}^i, \dots, v_j^i),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-2}^0, v_{2^k-3}^0, \dots, v_j^{2^k-1}, v_{j-1}^{2^k-2}, v_j^0, v_j^1, v_j^2, \dots, v_j^i),$$

그림 3 (g)를 참조하라. $|P_1| = i + j$, $|P_2| = i + j + 2$, $|P_3| = 1 + i + (2^k - 1 - j)$
 $= 2^k + i - j \leq 2^k - 4$ 이고, $|P_4| = 1 + (2^k - 1 - (j - 1)) + 1 + i = 2^k + i - j + 2$
 $\leq 2^k - 2$ 이다.

경우 10 $j \geq 2^{k-1} + 1$ 이고 $i + j = 2^k - 1$ 혹은 $i + j = 2^k$ (단 $j = 2^k - 1$ 인 경우는 제외)

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0, \dots, v_j^0, v_j^1, v_j^2, \dots, v_j^i),$$

$$P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2, \dots, v_0^i, v_1^i, v_2^i, \dots, v_j^i),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-1}^1, v_{2^k-1}^2, \dots, v_{2^k-1}^i, v_{2^k-2}^i, v_{2^k-3}^i, \dots, v_j^i)$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-2}^0, v_{2^k-3}^0, \dots, v_j^{2^k-1}, v_j^{2^k-2}, v_j^{2^k-3}, \dots, v_j^i).$$

그림 3 (h)를 참조하라. 이 경우는 $j > i$ 이다. $|P_1| = |P_2| = i + j$, $|P_3| = 1 + i + (2^k - 1 - j) = 2^k + i - j$ 이고, $|P_4| = 1 + (2^k - 1 - j) + (2^k - 1 - i) = 2 \cdot 2^k - (i + j + 1)$ 이다. 각 경로의 길이는 2^k 이하이다. $|P_3| \leq 2^k - 1$ 이다.

경우 11 $j \geq 2^{k-1} + 1$, $i + j \geq 2^k + 1$ (단 $j = 2^k - 1$ 인 경우는 제외)

이 경우에는 $i - j \leq -2$ 이다.

$$P_1 = (v_0^0, v_0^1, v_1^1, v_1^2, v_1^3, \dots, v_1^i, v_0^i, v_{2^k-1}^i, v_{2^k-2}^i, v_{2^k-3}^i, \dots, v_j^i),$$

$$P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2, \dots, v_0^{i-1}, v_{2^k-1}^{i-1}, v_{2^k-2}^{i-1}, v_{2^k-3}^{i-1}, \dots, v_j^{i-1}, v_j^i),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-2}^0, v_{2^k-3}^0, \dots, v_j^0, v_{j-1}^0, v_{j-1}^1, v_{j-1}^2, \dots, v_{j-1}^i, v_j^i),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-2}^0, v_{2^k-3}^0, \dots, v_j^{2^k-1}, v_j^{2^k-2}, v_j^{2^k-3}, \dots, v_j^i).$$

그림 3 (i)를 참조하라. 이 경우에는 $j - i \geq 2$ 이다. $|P_1| = 3 + i + (2^k - 1 - j) = 2^k + i - j + 2 \leq 2^k$, $|P_2| = i + 1 + (2^k - 1 - j) = 2^k + i - j \leq 2^k - 2$, $|P_3| = 1 + (2^k - 1 - (j - 1)) + i + 1 = 2^k + i - j + 2 \leq 2^k$ 이고, $|P_4| = 1 + (2^k - 1 - j) + (2^k - 1 - i) = 2 \cdot 2^k - (i + j + 1) \leq 2^k - 2$ 이다. \square

위의 보조정리로부터 재귀원형군 $G(2^{2k}, 2^k)$ 의 고장지름은 $dia_{m,k} + 1 (= 2^k)$ 임을 알 수 있다. 이제 위의 보조정리와 다음의 보조정리를 이용하여 일반적인 재귀원형군의 지름에

대한 결과를 얻을 수 있다. 다음 보조정리는 인접한 두 정점 사이의 서로소인 경로에 대한 성질이다.

보조정리 4 $k \geq 3$ 이고 분지수가 3이상인 $G(2^m, 2^k)$ 에서 인접한 두 정점 사이에 다음을 만족하는 $\delta_{m,k}$ 개의 서로소인 경로가 존재한다: 하나의 경로는 길이가 1이고, $\delta_{m,k} - 2$ 개의 경로는 길이가 3이고, 나머지 하나의 경로는 길이가 $2^k + 1$ 이하이다.

증명 수학적 귀납법으로 증명한다. 먼저 분지수가 3인 경우는 보조정리 2로부터 성립한다. 분지수가 4인 경우 즉, $k+1 < m \leq 2k$ 인 경우에 대하여 보인다. u 를 G_0 의 정점인 v_0^0 라 가정한다. G_0 는 길이가 2^{m-k} 인 사이클과 동형이다. $v = v_j^i$ 라 하자. v_0^0 와 v 사이에 정리의 조건을 만족하는 서로소인 4 경로 P_1, P_2, P_3, P_4 를 다음과 같이 구한다.

경우 1 $v = v_1^0$ 인 경우

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0), P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_1^1, v_1^0), P_3 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_1^0),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^0, v_{2^{m-k}-1}^1, v_{2^{m-k}-1}^2, v_0^2, v_1^2, v_2^2, v_2^1, v_2^0, v_1^0).$$

$$|P_4| = 9 \leq 2^k + 1 \text{이다.}$$

경우 2 $v = v_{2^{m-k}-1}^0$ 인 경우

성질 2에 의하여 경우 1과 대칭적이므로 성립한다.

경우 3 $v = v_0^1$ 인 경우

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_1^1, v_0^1), P_2 = (v_0^0, v_0^1), P_3 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^0, v_{2^{m-k}-1}^1, v_0^1),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_0^{2^k-2}, v_0^{2^k-3}, v_0^{2^k-4}, \dots, v_0^1).$$

경우 4 $v = v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}$ 인 경우

성질 2에 의하여 경우 3과 대칭적이므로 성립한다.

모든 $m > 2k$ 인 $G(2^m, 2^k)$ 을 고려한다. $k+1 \leq n < m$ 에 대하여 $G(2^n, 2^k)$ 에 대하여 인접한 임의의 두 정점에 대하여 정리의 조건을 만족하는 $\delta_{n,k}$ 개의 서로소인 경로가 존재한다고 가정하자. 그러면 $G(2^m, 2^k)$ 에 대하여 인접한 임의의 두 정점 u, v 에 대하여 정리의 조건을 만족하는 $\delta_{m,k}$ 개의 서로소인 경로가 존재함을 보인다. $u = v_0^0$ 라 가정한다. $v = v_j^i$ 라 하자. $G(2^m, 2^k)$ 의 대칭성에 의하여 다음 두 경우만 고려하면 된다.

경우 1 v 가 G_0 의 정점일 경우, 즉 $v = v_j^0$ 일 경우

G_0 는 $G(2^{m-k}, 2^k)$ 와 동형이고, $\delta_{m,k} = \delta_{m-k,k} + 2$ 이다. 귀납법 가정에 의하여 G_0 에서 v_0^0 와 v_j^0 사이에 정리의 조건을 만족하는 $\delta_{m-k,k}$ 개의 서로소인 경로가 존재한다. 이들 경로들과

다음 두 경로 P_1, P_2 가 정리의 조건을 만족하는 경로이다.

$P_1 = (v_0^0, v_0^1, v_j^1, v_j^0)$, $P_2 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_{j-1}^{2^k-1 \pmod{2^{m-k}}}, v_j^0)$ 이다. v_0^0 와 v_j^0 가 인접하므로, v_0^1 와 v_j^1 가 인접하고, $v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}$ 과 $v_{j-1}^{2^k-1 \pmod{2^{m-k}}}$ 가 인접하다.

경우 2 $v = v_0^1$ 일 경우

G_0 에서 v_0^0 와 인접한 정점들을 $w_1, w_2, w_3, \dots, w_{\delta_{m-k,k}}$ 라 하자.

각 $1 \leq l \leq \delta_{m-k,k}$ 에 대하여 $P_l = (v_0^0, w_l, w'_l, v_0^1)$. 여기서 w'_l 은 w_l 과 인접한 G_1 의 정점이다. v_0^0 와 w_l 이 인접하므로 v_0^1 와 w'_l 이 인접함을 관찰하라.

$P_{\delta_{m-k,k}+1} = (v_0^0, v_0^1)$. 나머지 하나의 경로 $P_{\delta_{m-k,k}+2} = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_0^{2^k-2}, v_0^{2^k-3}, \dots, v_0^1)$. $P_{\delta_{m-k,k}+1}$ 의 길이는 2^k 이다. \square

정리 1 $k \geq 3$, $m > 3k + 1$ 이고, $c \geq 1$ 인 양의 정수 m, k, c 에 대하여, $G(2^{m-2k}, 2^k)$ 에서 인접하지 않은 모든 두 정점 사이에 길이가 $dia_{m-2k,k} + c$ 이하인 서로소인 경로가 $\delta_{m-2k,k}$ 개 존재한다면, $G(2^m, 2^k)$ 에서 인접하지 않은 모든 두 정점 u, v 사이에 길이가 $dia_{m,k} + c$ 이하인 서로소인 경로가 $\delta_{m,k}$ 개 존재한다.

증명 성질 1에 의하여 $k \geq 3$ 인 $G(2^m, 2^k)$ 의 지름 $dia_{m,k} = dia_{m-2k,k} + 2^k - 1$ 이다. 그런데 $m > 3k + 1$ 이므로 $m - 3k > 1$ 이다. 또한 $k \geq 3$ 이므로 $dia_{m-2k,k} \geq 5$ 이다. 그러므로 $dia_{m,k} \geq 2^k + 4$ 이다. $G(2^m, 2^k)$ 는 정점 대칭적이므로 u 를 $G_{0,0}$ 의 정점인 v_0^0 라 가정한다. $G_{0,0}$ 는 $G(2^{m-2k}, 2^k)$ 와 동형이다.

경우 1 v 가 $G_{0,0}$ 의 정점일 경우

$\delta_{m,k} = \delta_{m-2k,k} + 4$ 이다. 가정에 의하여 $G_{0,0}$ 에서 u, v 사이에 길이가 $dia_{m-2k,k} + c$ 이하인 서로소인 경로가 $\delta_{m-2k,k}$ 개 존재한다. 이들 경로와 함께 다음의 4 경로 P_1, P_2, P_3, P_4 가 정리의 조건을 만족하는 경로들이다.

$P_1 = (u, P_1, v)$, P_1 은 $G_{0,1}$ 에서 u, v 와 인접한 두 정점 사이의 최단경로이다.

$P_2 = (u, P_2, v)$, P_2 는 $G_{1,0}$ 에서 u, v 와 인접한 두 정점 사이의 최단경로이다.

$P_3 = (u, P_3, v)$, P_3 은 $G_{0,2^k-1}$ 에서 u, v 와 인접한 두 정점 사이의 최단경로이다.

$P_4 = (u, P_4, v)$, P_4 는 $G_{2^k-1, 2^k-1}$ 에서 u, v 와 인접한 두 정점 사이의 최단경로이다.

이들 각 경로의 길이는 $dia_{m-2k,k} + 2$ 이하이다. 그러므로 모든 경로는 길이가 $dia_{m,k} + c$ 보다 같거나 작다.

경우 2 v 가 $G_{0,0}$ 의 정점이 아닐 경우

v 를 $G(2^{m-2k}, 2^k)$ 과 동형인 $G_{i,j}$ 의 정점이라 하자. 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 의 축약 그래프

G^c 를 고려한다. G^c 는 $G(2^{2k}, 2^k)$ 와 동형이다. $G_{0,0}$ 와 $G_{i,j}$ 에 대응하는 G^c 의 정점을 각각 u^c, v^c 라 하자. 보조정리 3에 의하여 G^c 에서 u^c, v^c 사이의 길이가 2^k 이하인 서로소인 4개의 경로 $Q_1^c, Q_2^c, Q_3^c, Q_4^c$ 가 존재한다. 이들 경로 중 길이가 가장 짧은 경로를 Q_4^c 라 하자. 보조정리 3에 의하여 $|Q_4^c| \leq 2^k - 1$ 이다. 그리고 Q_1^c, Q_2^c, Q_3^c 의 길이는 모두 2이상이다. 왜냐하면 Q_i^c 들 중 길이가 1인 경로는 기껏해야 하나 있고, Q_4^c 가 가장 짧은 경로이기 때문이다. 이들 경로를 이용하여 u, v 사이의 길이가 $dia_{m,k} + c$ 이하인 서로소인 $\delta_{m,k}$ 개의 경로를 구한다.

먼저 각 $1 \leq l \leq 3$ 에 대하여 Q_l^c 에 의한 u, v 사이의 경로인 $Q_l^c(u, v)$ 를 구한다.

$$|Q_l^c(u, v)| \leq |Q_l^c| + dia_{m-2k,k} \leq 2^k + dia_{m-2k,k} \leq dia_{m,k} + 1 \text{이다.}$$

나머지 $\delta_{m,k} - 3 (= \delta_{m-2k,k} + 1)$ 개의 경로 $P_1, P_2, \dots, P_{\delta_{m-2k,k}+1}$ 을 Q_4^c 로부터 다음과 같이 구한다. Q_4^c 에 의한 u 로부터의 경로인 $Q_4^c(u)$ 의 마지막 정점을 u' 라 하자. u' 과 v 의 관계에 따라 다음의 3 경우로 나누어 고려한다. $G_{0,0}$ 에서 u 와 인접한 정점들을 $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{\delta_{m-2k,k}}$ 라 하고, $1 \leq l \leq \delta_{m-2k,k}$ 에 대하여, $Q_4^c(s_l)$ 의 마지막 정점을 t_l 이라 하자. t_l 들은 $G_{i,j}$ 의 정점이다. (그림 4 참조).

경우 2-1 $u' = v$ 인 경우 (그림 4 (a) 참조)

$1 \leq l \leq \delta_{m-2k,k}$ 에 대하여 $P_l = (u, Q_4^c(s_l), v)$ 로 둔다. 여기서 $Q_4^c(s_l)$ 는 Q_4^c 에 의한 s_l 로부터의 경로이고 이 경로의 마지막 정점은 v 와 인접함을 관찰하라. 각 경로의 길이는 $|Q_4^c| + 2 \leq 2^k + 1$ 이다.

나머지 하나의 경로 $P_{\delta_{m-2k,k}+1} = Q_4^c(u)$ 로 둔다. 이들 경로들과 위에서 구한 $Q_i^c(u, v)$ ($1 \leq i \leq 3$) 들은 서로소이며 길이가 $dia_{m,k} + c$ 이하이다.

경우 2-2 u' 와 v 가 인접할 경우 (그림 4 (b) 참조)

u' 가 v 와 인접하므로 t_l 들 중에서 v 와 동일한 정점이 있다. 이 정점을 $t_{\delta_{m-2k,k}}$ 라 하자. 즉 $Q_4^c(s_{\delta_{m-2k,k}})$ 의 마지막 정점이 v 와 동일하다. $G_{i,j}$ 에서 u' 과 v 사이에 보조정리 4의 조건을 만족하는 $\delta_{m-2k,k}$ 개의 서로소인 경로를 $R_1, R_2, \dots, R_{\delta_{m-2k,k}}$ 라 하자. 여기서 $|R_1| = |R_2| = \dots = |R_{\delta_{m-2k,k}-2}| = 3, |R_{\delta_{m-2k,k}-1}| \leq 2^k + 1, |R_{\delta_{m-2k,k}}| = 1$ 이라 하고, $1 \leq l \leq \delta_{m-2k,k} - 1$ 에 대하여 R_l 이 t_l 을 지나간다고 하자. 그리고 $G_{i,j}$ 에서 v 와 인접한 정점으로서 R_l 을 지나는 정점을 w_l 이라 하자. 즉, 각 $1 \leq l \leq \delta_{m-2k,k} - 2$ 에 대하여 $R_l = (u', t_l, w_l, v)$ 이고, $R_{\delta_{m-2k,k}-1}$ 은 $t_{\delta_{m-2k,k}-1}$ 과 $w_{\delta_{m-2k,k}-1}$ 을 지나는 경로이다. 그리고 $R_{\delta_{m-2k,k}} = (u', v)$ 이다.

경우 2-2-1 $|Q_4^c| = 1$ 인 경우

$1 \leq l \leq \delta_{m-2k,k} - 2$ 에 대하여 $P_l = (u, s_l, t_l, w_l, v)$.

그리고 $P_{\delta_{m-2k,k}-1} = (u, s_{\delta_{m-2k,k}-1}, R_{\delta_{m-2k,k}-1} - u')$, $P_{\delta_{m-2k,k}} = (u, s_{\delta_{m-2k,k}}, v)$. 경로 $P_{\delta_{m-2k,k}-1}$ 은 u 에서 $s_{\delta_{m-2k,k}-1}$ 와 $t_{\delta_{m-2k,k}-1}$ 을 지나 $R_{\delta_{m-2k,k}-1} - u'$ 를 따라 v 로 가는 경로임을 관찰하라. 여기서 $R_{\delta_{m-2k,k}-1} - u'$ 는 경로 $R_{\delta_{m-2k,k}-1}$ 에서 시작 정점 u' 을 제외한 경로이다. $|P_{\delta_{m-2k,k}-1}| \leq 2^k + 2$ 이다. 마지막 경로는 다음과 같이 구성한다.

$P_{\delta_{m-2k,k}+1} = (u, u', v)$ 이다.

이들 경로들의 길이는 모두 $2^k + 2$ 이하이므로, $dia_{m,k} + c$ 이하이다.

경우 2-2-2 $|Q_4^c| > 1$ 인 경우 (그림 4 (b) 참조)

$1 \leq l \leq \delta_{m-2k,k} - 2$ 에 대하여 $P_l = (u, Q_4^c(s_l), w_l, v)$ 로 두고, $P_{\delta_{m-2k,k}-1} = (u, Q_4^c(s_{\delta_{m-2k,k}-1}), u', v)$ 로 둔다. 경로 $P_{\delta_{m-2k,k}-1}$ 은 u 에서 $Q_4^c(s_{\delta_{m-2k,k}-1})$ 을 따라 $t_{\delta_{m-2k,k}-1}$ 에 가서 u' 을 지나 v 로 가는 경로임을 관찰하라.

Q_4^c 의 역경로에 의한 $w_{\delta_{m-2k,k}-1}$ 로부터의 경로에서 마지막 정점을 w' 라 하자. w' 와 $s_{\delta_{m-2k,k}}$ 와 인접함을 관찰하라.

$P_{\delta_{m-2k,k}} = (u, s_{\delta_{m-2k,k}}, Q_4^c(w'), v)$ 로 둔다.

이들 경로들의 길이는 모두 $2^k + 2$ 이하이므로, $dia_{m,k} + c$ 이하이다.

마지막 하나의 경로 $P_{\delta_{m-2k,k}+1}$ 를 구한다. $|Q_4^c| > 1$ 이므로 Q_4^c 상에서 u^c 와 v^c 이외의 정점을 w^c 가 존재한다. Q_4^c 를 u^c 와 w^c 사이의 경로인 Q 와 w^c 와 v^c 사이의 경로 Q' 로 분할한다. Q 에 의한 u 로부터의 경로에서 마지막 정점을 u'' 이라 하고, Q' 의 역경로에 의한 v 로부터의 경로에서 마지막 정점을 v'' 이라 하자. u'' 과 v'' 은 w^c 에 대응하는 부재귀원형군의 정점이다. u' 과 v 가 인접하므로 u 와 v' 가 인접하고, 또한 u'' 과 v'' 가 인접하다.

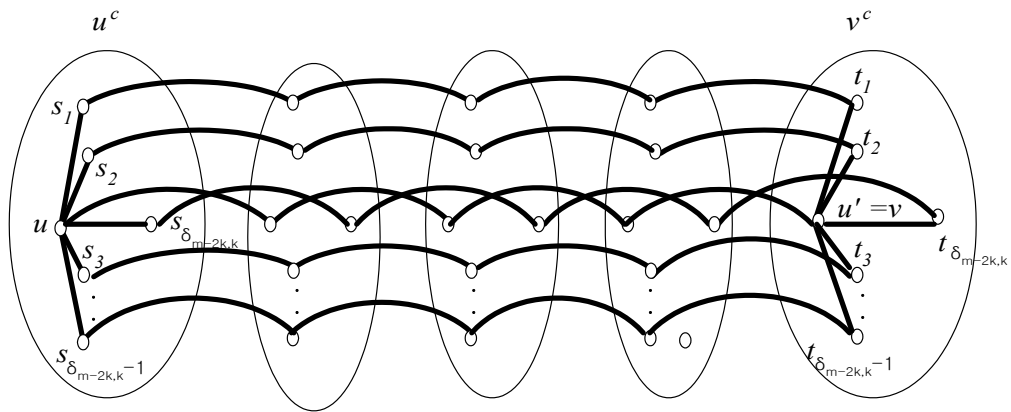
$P_{\delta_{m-2k,k}+1} = (Q(u), Q'(v''))$. 그러면 $|P_{\delta_{m-2k,k}+1}| \leq 2^k - 1 + 1 = 2^k < dia_{m,k} + 1$ 이다. 그림 4 (b)는 이들 경로를 보여준다.

경우 2-3 $u' \neq v$ 이고 u' 이 v 와 인접하지 않은 경우 (그림 4 (c) 참조)

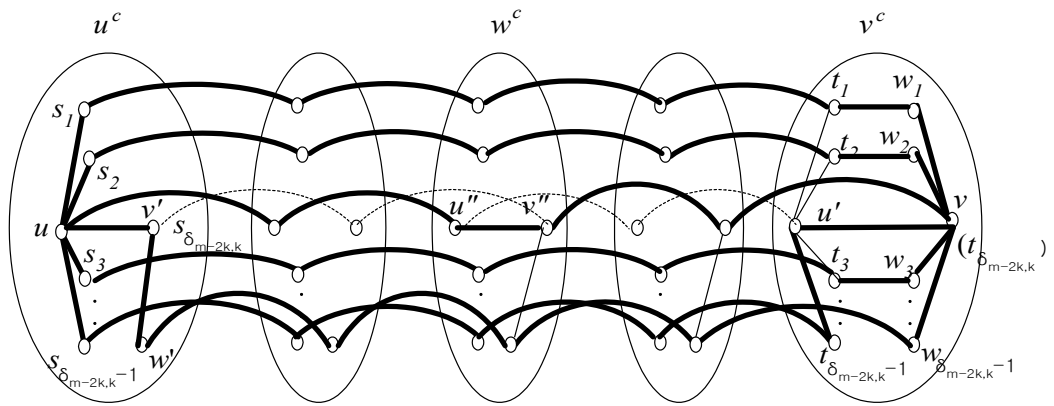
가정에 의하여 $G_{i,j}$ 에서 u' 와 v 사이의 길이가 $dia_{m-2k,k} + c$ 이하인 서로소인 $\delta_{m-2k,k}$ 개 경로들이 있는데, 이들 경로 중에서 t_i ($1 \leq i \leq \delta_{m-2k,k}$)를 지나가는 경로를 R_i 라 하자.

$P_1 = (Q_4^c(u), R_1)$.

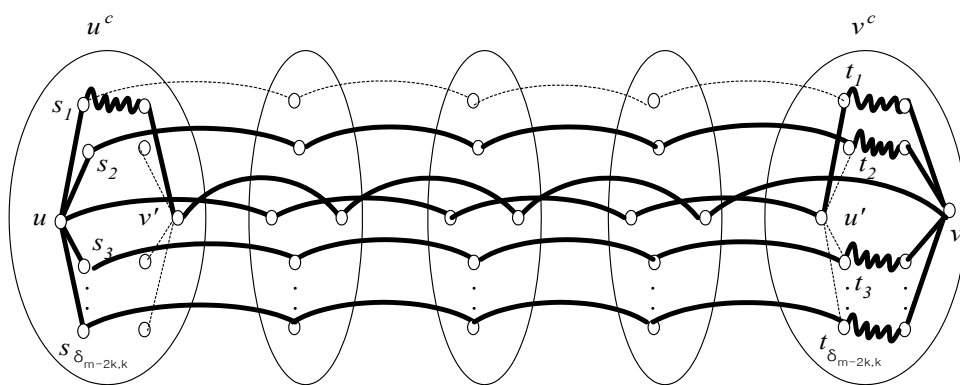
$2 \leq l \leq \delta_{m-2k,k}$ 에 대하여 $P_i = (u, Q_4^c(s_i), R_i - u')$ 로 둔다. 여기서 $R_i - u'$ 는 경로 R_i 에서 시작 정점 u' 를 제외한 경로 즉, R_i 에서 두 번째 정점부터 마지막 정점까지의 경로를 의미한다.



(a)



(b)



(c)

그림 4. Q_4^c 에 의하여 구성되는 경로들.

마지막 하나의 경로를 구한다. Q^c 의 역경로에 의한 v 로부터의 경로에서 마지막 정점을 v' 라 하자. 가정에 의하여 $G_{0,0}$ 에서 u 로부터 v' 까지의 길이가 $dia_{m-2k,k} + c$ 이하인 $\delta_{m-2k,k}$ 개의 서로소인 경로가 존재하는데, 이들 중 u 로부터 s_1 을 지나 v' 까지 가는 경로를 P 라 하자.

$P_{\delta_{m-2k,k}+1} = (P, Q_4^c(v'))$ 로 둔다. 그림 4 (c)는 이들 경로를 보여준다.

이들 경로들의 길이는 각각 $2^k - 1 + dia_{m-2k,k} + c$ 이하이므로 $dia_{m,k} + c$ 이하이고, 이들 경로와 $Q_i^c(u, v)$ ($1 \leq i \leq 3$)는 정리의 조건을 만족하는 서로소인 경로이다. \square

위의 정리부터 일반적인 채귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 의 고장지름은 기본적(base) 경우의 고장지름을 분석하면 얻을 수 있다. 다음부터 기본적인 경우의 고장지름을 보인다. 기본적 경우는 $k+1 < m \leq 2k$ (분지수가 4), $m = 2k+1$ (분지수가 5), $2k+1 < m \leq 3k$ (분지수가 6), $m = 3k+1$ (분지수가 7)의 4가지이다.

보조정리 5 $k \geq 3$, $k+1 < m \leq 2k$ (즉 분지수가 4인) 채귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 에서 인접하지 않은 모든 두 정점 u, v 사이에 길이가 $dia_{m,k} + 2$ 이하인 서로소인 경로들이 4개 존재한다.

증명 $m = 2k$ 인 경우는 보조정리 3에서 보였다. 다음에서 $k+1 < m < 2k$ 인 경우에 대하여 보조정리가 성립함을 보인다. 성질 1에 의하여 $k+1 < m \leq 2k$ 인 (즉 분지수가 4인) 채귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 의 지름 $dia_{m,k} = dia_{m-k,k} + 2^{k-1} - 1 = 2^{m-k-1} + 2^{k-1} - 1$ 이다. 그리고 $m < 2k$ 이므로 $1 < m-k \leq k-1$ 이다. 또한 $k \geq 3$ 이므로 $dia_{m,k} \geq 2^{m-k-1} + 3$ 이고, $dia_{m,k} \geq 2^{k-1} + 1$ 이다. $G(2^m, 2^k)$ 의 각 부채귀원형군 G_i 의 정점의 수는 2^{m-k} 이다. $u = v_0^0$ 라 가정한다. $v = v_j^i$ 라 하자. $i \leq 2^k - 1$, $j \leq 2^{m-k} - 1$ 이다. 성질 2의 대칭성에 의하여 $i \leq 2^{k-1} - 1$ 이거나 혹은 $i = 2^{k-1}$, $j < 2^{m-k-1}$ 이라 가정한다.

경우 1 $i = 0$

u 와 v 는 인접하지 않으므로 $2 \leq j \leq 2^{m-k} - 2$ 이다.

먼저 두 경로 P_1, P_2 를 구한다. $P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0, \dots, v_j^0)$, $P_2 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^0, v_{2^{m-k}-2}^0, v_{2^{m-k}-3}^0, \dots, v_j^0)$. 그러면 $|P_1| = j \leq 2^{m-k} - 2$, $|P_2| = 2^{m-k} - j \leq 2^{m-k} - 2$ 이다. $m < 2k$ 이므로 $|P_1|, |P_2| \leq 2^{k-1} - 2$ 이다.

경우 1-1 $j \leq 2^{m-k-1}$

$P_3 = (v_0^0, v_0^1, v_1^1, v_2^1, v_3^1, \dots, v_j^1, v_j^0)$, $P_4 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_1^{2^k-1}, v_2^{2^k-1}, \dots, v_{j-1}^{2^k-1}, v_j^0)$.

두 경로의 길이 $|P_3| = |P_4| = j+2 \leq 2^{m-k-1} + 2$ 이다.

경우 1-2 $j > 2^{m-k-1}$

$$P_3 = (v_0^0, v_0^1, v_{2^{m-k}-1}^1, v_{2^{m-k}-2}^1, v_{2^{m-k}-3}^1, \dots, v_j^1, v_j^0),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_{2^{m-k}-2}^{2^k-1}, v_{2^{m-k}-3}^{2^k-1}, \dots, v_{j-1}^{2^k-1}, v_j^0).$$

두 경로의 길이 $|P_3| = |P_4| = 2^{m-k} + 2 - j \leq 2^{m-k-1} + 1$ 이다.

어떤 경우이든 각 경로의 길이는 $dia_{m,k}$ 보다 작다.

경우 2 $j = 0, i \leq 2^{k-1}$

u 와 v 는 인접하지 않으므로 $i > 1$ 이다.

경우 2-1 $i = 2$ 인 경우

$v = v_0^2$ 이다.

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_1^1, v_1^2, v_0^2), P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2), P_3 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^0, v_{2^{m-k}-1}^1, v_{2^{m-k}-1}^2, v_0^2),$$

$$k = 3 \text{ 일 때 } P_4 = (v_0^0, v_3^7, v_0^7, v_0^6, v_0^5, v_0^4, v_0^3, v_0^2) \text{ 이고,}$$

$$k \geq 4 \text{ 일 때 } P_4 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_1^{2^k-1}, v_2^0, v_2^1, v_2^2, v_2^3, v_1^3, v_0^3, v_0^2) \text{ 이다.}$$

$m > k + 1$ 이고 $dia_{m,k} = 2^{m-k-1} + 2^{k-1} - 1$ 이므로 $k = 3$ 일 경우 $dia_{m,k} \geq 5$ 이고, $k \geq 4$ 일 경우 $dia_{m,k} \geq 9$ 이다. 따라서 위의 각 경로의 길이는 $dia_{m,k} + 2$ 이하이다.

경우 2-2 $3 \leq i \leq 2^{k-1} - 3$ 인 경우

이 경우에는 $k > 3$ 이다.

$$P_1 = (v_0^0, v_0^1, v_1^1, v_1^2, v_0^2, v_0^3, v_0^4, \dots, v_0^i),$$

$$P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_{2^{m-k}-1}^1, v_{2^{m-k}-1}^2, v_{2^{m-k}-1}^3, \dots, v_{2^{m-k}-1}^i, v_0^i),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^0, v_{2^{m-k}-2}^0, v_{2^{m-k}-2}^1, v_{2^{m-k}-2}^2, \dots, v_{2^{m-k}-2}^i, v_{2^{m-k}-2}^{i+1}, v_{2^{m-k}-1}^{i+1}, v_0^{i+1}, v_0^i),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_1^{2^k-1}, v_2^0, v_2^1, v_2^2, v_2^3, \dots, v_2^i, v_1^i, v_0^i).$$

4 경로의 길이 $|P_1| = |P_2| = i + 2, |P_3| = |P_4| = i + 6 \leq 2^{k-1} + 3 \leq dia_{m,k} + 2$ 이다.

경우 2-3 $2^{k-1} - 2 \leq i \leq 2^{k-1}$

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^i, v_0^i), P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2, v_0^3, \dots, v_0^i),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^0, v_{2^{m-k}-1}^1, v_{2^{m-k}-1}^2, \dots, v_{2^{m-k}-1}^i, v_0^i),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_0^{2^k-2}, v_0^{2^k-3}, \dots, v_0^i).$$

$|P_1| = i + 2, |P_2| = i, |P_3| = i + 2, |P_4| = 2 + (2^k - 1 - i) \leq 2^{k-1} + 3 \leq dia_{m,k} + 2$ 이다. 4 경로의 길이는 $dia_{m,k} + 2$ 이하이다.

경우 3 $1 \leq i \leq 2^{k-1} - 1, 1 \leq j \leq 2^{m-k-1} - 1$ (단 $i = 2^{k-1} - 1, j = 2^{m-k-1} - 1$ 은 제외)

$i + j \leq 2^{m-k-1} + 2^{k-1} - 3$ 이다.

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0, \dots, v_j^0, v_j^1, v_j^2, \dots, v_j^i),$$

$$P_2 = (v_0^0, v_1^1, v_2^2, \dots, v_0^i, v_1^i, v_2^i, \dots, v_j^i),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^0, v_{2^{m-k}-1}^1, v_{2^{m-k}-1}^2, \dots, v_{2^{m-k}-1}^{i+1}, v_{2^{m-k}-1}^{i+1}, v_0^{i+1}, v_1^{i+1}, v_2^{i+1}, \dots, v_j^{i+1}, v_j^i),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_1^{2^k-1}, v_2^{2^k-1}, \dots, v_j^{2^k-1}, v_{j+1}^0, v_{j+1}^1, v_{j+1}^2, \dots, v_{j+1}^i, v_j^i).$$

$|P_1| = |P_2| = i + j \leq 2^{m-k-1} + 2^{k-1} - 3$ 이다. 그리고 $|P_3| = |P_4| = i + j + 4 \leq 2^{m-k-1} + 2^{k-1} + 1$ 이다. 그러므로 각 경로는 길이가 $dia_{m,k} + 2$ 이하이다.

경우 4 $i = 2^{k-1}, 1 \leq j \leq 2^{m-k-1} - 2$

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_2^0, \dots, v_j^0, v_{j+1}^0, v_{j+1}^1, v_{j+1}^2, v_{j+1}^3, \dots, v_{j+1}^i, v_j^i),$$

$$P_2 = (v_0^0, v_1^1, v_2^2, \dots, v_0^{i-1}, v_1^{i-1}, v_2^{i-1}, \dots, v_j^{i-1}, v_j^i),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^0, v_{2^{m-k}-1}^1, v_{2^{m-k}-1}^2, \dots, v_{2^{m-k}-1}^i, v_0^i, v_1^i, v_2^i, \dots, v_j^i),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_1^{2^k-1}, v_2^{2^k-1}, \dots, v_j^{2^k-1}, v_j^{2^k-2}, v_j^{2^k-3}, \dots, v_j^i).$$

$|P_1| = |P_3| = i + j + 2 \leq 2^{m-k-1} + 2^{k-1}$, $|P_2| = i + j \leq 2^{m-k-1} + 2^{k-1} - 2$ 이고,

$|P_4| = 2^k + j + 1 - i \leq 2^{m-k-1} + 2^{k-1} - 1 = dia_{m,k}$ 이다.

경우 5 $j = 2^{m-k-1}, 1 \leq i \leq 2^{k-1} - 2$

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_2^0, \dots, v_{j-1}^0, v_{j-1}^1, v_{j-1}^2, \dots, v_{j-1}^i, v_j^i),$$

$$P_2 = (v_0^0, v_1^1, v_2^2, \dots, v_0^i, v_0^{i+1}, v_1^{i+1}, v_2^{i+1}, \dots, v_j^{i+1}, v_j^i),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^0, v_{2^{m-k}-1}^1, v_{2^{m-k}-1}^2, \dots, v_{2^{m-k}-1}^i, v_{2^{m-k}-2}^i, v_{2^{m-k}-3}^i, \dots, v_j^i),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_{2^{m-k}-2}^{2^k-1}, v_{2^{m-k}-3}^{2^k-1}, \dots, v_{j-1}^{2^k-1}, v_j^0, v_j^1, v_j^2, \dots, v_j^i).$$

$|P_1| = i + j \leq 2^{m-k-1} + 2^{k-1} - 2$, $|P_2| = i + j + 2 \leq 2^{m-k-1} + 2^{k-1}$, $|P_3| = 1 + i + (2^{m-k} - 1 - j) \leq 2^{m-k-1} + 2^{k-1} - 2$ 이고, $|P_4| = 1 + (2^{m-k} - j) + 1 + i \leq 2^{m-k-1} + 2^{k-1}$ 이다. 그러므로 모든 경로는 길이가 $dia_{m,k} + 2$ 이하이다.

경우 6 $2^{k-1} - 1 \leq i \leq 2^{k-1}, 2^{m-k-1} - 1 \leq j \leq 2^{m-k-1}$

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0, \dots, v_j^0, v_j^1, v_j^2, \dots, v_j^i),$$

$$P_2 = (v_0^0, v_1^1, v_2^2, \dots, v_0^i, v_1^i, v_2^i, \dots, v_j^i),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^0, v_{2^{m-k}-1}^1, v_{2^{m-k}-1}^2, \dots, v_{2^{m-k}-1}^i, v_{2^{m-k}-2}^i, v_{2^{m-k}-3}^i, \dots, v_j^i),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_{2^{m-k}-2}^{2^k-1}, v_{2^{m-k}-3}^{2^k-1}, \dots, v_j^{2^k-1}, v_j^{2^k-2}, v_j^{2^k-3}, \dots, v_j^i).$$

$|P_1| = |P_2| = i + j \leq 2^{m-k-1} + 2^{k-1}$ 이다. 그리고 $|P_3| = 1 + i + (2^{m-k} - 1 - j) \leq 2^{m-k-1} + 2^{k-1} + 1$ 이고, $|P_4| = 1 + (2^{m-k} - 1 - j) + (2^k - 1 - i) \leq 2^{m-k-1} + 2^{k-1} + 1$ 이다. 각 경로의 길이는 $dia_{m,k} + 2$ 이하이다.

경우 7 $j = 2^{m-k} - 1, i > 0$

경우 7-1 $i \leq 2^{k-1} - 2$

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_1^1, v_1^2, v_1^3, \dots, v_1^{i+1}, v_0^{i+1}, v_{2^{m-k}-1}^{i+1}, v_{2^{m-k}-1}^i),$$

$$P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2, \dots, v_0^i, v_{2^{m-k}-1}^i),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^0, v_{2^{m-k}-1}^1, v_{2^{m-k}-1}^2, \dots, v_{2^{m-k}-1}^i),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_{2^{m-k}-2}^{2^k-1}, v_{2^{m-k}-3}^{2^k-1}, v_{2^{m-k}-2}^0, v_{2^{m-k}-2}^1, \dots, v_{2^{m-k}-2}^i, v_{2^{m-k}-1}^i)$$

$|P_1| = i + 5, |P_2| = i + 1, |P_3| = i + 1, |P_4| = i + 5. \quad i + 5 \leq 2^{k-1} + 3 \leq dia_{m,k} + 2$ 이다.

경우 7-2 $i = 2^{k-1} - 1$ 혹은 $i = 2^{k-1}$

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^i, v_0^i, v_{2^{m-k}-1}^i), P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2, \dots, v_0^{i-1}, v_{2^{m-k}-1}^{i-1}, v_{2^{m-k}-1}^i),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^0, v_{2^{m-k}-2}^0, v_{2^{m-k}-2}^1, v_{2^{m-k}-2}^2, \dots, v_{2^{m-k}-2}^i, v_{2^{m-k}-1}^i),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-2}, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-3}, \dots, v_{2^{m-k}-1}^i).$$

$|P_1| = i + 3, |P_2| = i + 1, |P_3| = i + 3, |P_4| = 2^k - i$ 이다. $i + 3 \leq 2^{k-1} + 3$ 이고, $2^k - i \leq 2^{k-1} + 1$ 이므로 각 경로는 길이가 $dia_{m,k} + 2$ 이하이다.

경우 8 $j \geq 2^{m-k-1} + 1, i + j \leq 2^{k-1} + 2^{m-k-1} - 1$ (단 $i \neq 0, j \neq 2^{m-k} - 1$)

$i = 0$ 인 경우와 $j = 2^{m-k} - 1$ 인 경우는 각각 경우1과 경우7에서 고려하였다.

이 경우 $i \leq 2^{k-1} - 2$ 이다. 그러므로 $i - j \leq 2^{k-1} - 2^{m-k-1} - 3$ 이다.

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_2^0, \dots, v_{j-1}^0, v_{j-1}^1, v_{j-1}^2, \dots, v_{j-1}^i, v_j^i),$$

$$P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2, \dots, v_0^i, v_0^{i+1}, v_1^{i+1}, v_2^{i+1}, \dots, v_j^{i+1}, v_j^i),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^0, v_{2^{m-k}-1}^1, v_{2^{m-k}-1}^2, \dots, v_{2^{m-k}-1}^i, v_{2^{m-k}-2}^i, v_{2^{m-k}-3}^i, \dots, v_j^i),$$

$$P_4 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_{2^{m-k}-2}^{2^k-1}, v_{2^{m-k}-3}^{2^k-1}, \dots, v_j^{2^k-1}, v_{j-1}^{2^k-1}, v_j^0, v_j^1, v_j^2, \dots, v_j^i),$$

$|P_1| = i + j, |P_2| = i + j + 2, |P_3| = 1 + i + (2^{m-k} - 1 - j) = 2^{m-k} + i - j$ 이고, $|P_4| = 1 + (2^{m-k} - 1 - (j - 1)) + 1 + i = 2^{m-k} + i - j + 2$ 이다. 각 경로는 길이가 $dia_{m,k} + 2$ 이하이다.

경우 9 $j \geq 2^{m-k-1} + 1, i + j \geq 2^{k-1} + 2^{m-k-1}$

이 경우에는 $i \leq 2^{k-1} - 1$ 이다.

$$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_1^1, v_1^2, v_1^3, \dots, v_1^i, v_0^i, v_{2^{m-k}-1}^i, v_{2^{m-k}-2}^i, v_{2^{m-k}-3}^i, \dots, v_j^i),$$

$$P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2, \dots, v_0^{i-1}, v_{2^{m-k}-1}^{i-1}, v_{2^{m-k}-2}^{i-1}, v_{2^{m-k}-3}^{i-1}, \dots, v_j^{i-1}, v_j^i),$$

$$P_3 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^0, v_{2^{m-k}-2}^0, v_{2^{m-k}-3}^0, \dots, v_j^0, v_{j-1}^0, v_{j-1}^1, v_{j-1}^2, \dots, v_{j-1}^i, v_j^i),$$

$$\begin{aligned}
P_4 &= (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_{2^{m-k}-2}^{2^k-1}, v_{2^{m-k}-3}^{2^k-1}, \dots, v_j^{2^k-1}, v_j^{2^k-2}, v_j^{2^k-3}, \dots, v_j^i) \\
|P_1| &= 3 + i + (2^{m-k} - 1 - j) = 2^{m-k} + i - j + 2 \leq 2^{m-k-1} + 2^{k-1}, \quad |P_2| = \\
i + 1 + (2^{m-k} - 1 - j) &= 2^{m-k} + i - j \leq 2^{m-k-1} + 2^{k-1} - 2, \quad |P_3| = \\
1 + (2^{m-k} - j) + i + 1 &= 2^{m-k} + i - j + 2 \leq 2^{m-k-1} + 2^{k-1} \text{이고,} \quad |P_4| = \\
1 + (2^{m-k} - 1 - j) + (2^k - 1 - i) &= 2^{m-k} + 2^k - (i + j + 1) \leq 2^{m-k-1} + 2^{k-1} - 1 \text{이} \\
\text{다.} \quad \square
\end{aligned}$$

보조정리 6 $k \geq 3$, $m = 2k + 1$ (즉 분지수가 5인) 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 에서 인접하지 않은 모든 두 정점 u, v 사이에 길이가 $dia_{m,k} + 1$ 이하인 서로소인 경로들이 5개 존재한다.

증명 $dia_{2k+1,k} = 2^k$ 이다. 증명은 정리 1과 유사하게 보인다. $u = v_0^0$ 라 가정한다. u 가 속한 $G_{0,0}$ 는 K^2 와 동형이다. v 를 $G_{i,j}$ 의 정점이라 하자. u 와 v 는 인접하지 않으므로 v 는 $G_{0,0}$ 의 정점은 아니다. $G_{i,j}$ 는 K^2 와 동형이다. $G(2^m, 2^k)$ 의 축약 그래프 G^c 의 두 정점 u^c, v^c 를 각각 $G_{0,0}$ 와 $G_{i,j}$ 와 대응하는 정점이라 하자. G^c 에서 u^c, v^c 사이에 보조정리 3의 조건을 만족하는 서로소인 4개의 경로들을 $Q_1^c, Q_2^c, Q_3^c, Q_4^c$ 라 하고, 이들 중 가장 짧은 경로를 Q_4^c 라 한다. 보조정리 3에 의하여 각 경로는 길이가 2^k 이하이고, Q_4^c 는 길이가 $2^k - 1$ 이하이다. 이들 경로를 이용하여 u, v 사이의 길이가 $dia_{m,k} + 1$ 이하인 5개의 경로를 구한다.

먼저 Q_i^c ($1 \leq i \leq 3$)에 의한 u, v 사이의 경로 $Q_i^c(u, v)$ 를 구한다. 그러면 $|Q_i^c(u, v)| \leq |Q_i^c| + dia_{m-2k,k} \leq 2^k + 1 = dia_{m,k} + 1$ 이다. 여기서 $G(2^{m-2k}, 2^k)$ 는 K^2 와 동형이므로 $dia_{m-2k,k} = 1$ 이다.

나머지 2개의 경로는 Q_4^c 로부터 다음과 같이 구한다. u 와 인접한 $G_{0,0}$ 의 정점을 u' 라 하자. v^c 에 대응하는 부재귀원형군은 K^2 와 동형이므로, u' 로부터의 Q_4^c 에 의한 경로 $Q_4^c(u')$ 의 마지막 정점은 v 와 같든지 혹은 v 와 인접하다. $Q_4^c(u')$ 의 마지막 정점이 v 와 같으면 두 경로는 $(Q_4^c(u), v)$ 와 $(u, Q_4^c(u'))$ 이고, $Q_4^c(u')$ 의 마지막 정점이 v 와 인접하면 두 경로는 $Q_4^c(u)$ 와 $(u, Q_4^c(u'), v)$ 이다. 이들 각 경로의 길이는 $2^k + 1 (= dia_{m,k} + 1)$ 이하이다. \square

보조정리 7 $k \geq 3$, $2k + 1 < m \leq 3k$ (분지수가 6) 혹은 $m = 3k + 1$ (분지수가 7)인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 에서 인접하지 않은 모든 두 정점 u, v 사이에 길이가 $dia_{m,k} + 2$ 이하인 서로소인 경로들이 분지수 만큼 존재한다.

증명 u 를 $G_{0,0}$ 의 정점인 v_0^0 라 가정한다. 먼저 $m = 3k + 1$ 인 경우, 즉 분지수가 7인 재귀원형군에 대하여 보인다. $G(2^{3k+1}, 2^k)$ 의 지름 $dia_{3k+1,k} = 2^k - 1 + dia_{k+1,k} =$

$2^k + 2^{k-1} - 1$ 이다. $G_{0,0}$ 는 분지수가 3인 재귀원형군 $G(2^{k+1}, 2^k)$ 과 동형이다.

경우 1 v 가 G_0 의 정점일 경우

G_0 는 $G(2^{2k+1}, 2^k)$ 와 동형이다. 그러므로 보조정리 6에 의하여 G_0 에서 u 와 v 사이의 길이가 $dia_{2k+1,k} + 1$ 이하인 경로 5개 존재한다. 이들 경로와 다음의 두 경로 P_1, P_2 가 조건을 만족하는 경로들이다. $P_1 = (u, P, v), P_2 = (u, P', v)$. 여기서 P 는 G_1 에서 u 에 인접한 정점과 v 에 인접한 정점사이의 최단경로이고, P' 은 G_{2^k-1} 에서 u 에 인접한 정점과 v 에 인접한 정점사이의 최단경로이다. 이들 두 경로의 길이는 $dia_{2k+1,k} + 2$ 이하이다. $dia_{2k,k} = 2^k$ 이므로, 위에서 구한 7개의 경로는 각각 길이가 $dia_{3k+1,k}$ 이하이다.

경우 2 v 가 G_0 의 정점이 아닐 경우

v 를 $G_{i,j}$ ($i > 0$)의 정점이라 하자. $G_{i,j}$ 는 $G(2^{k+1}, 2^k)$ 와 동형이다. $G(2^{3k+1}, 2^k)$ 의 축약그래프 G^c 에서 u^c, v^c 를 각각 $G_{0,0}$ 와 $G_{i,j}$ 에 대응하는 정점이라 하자. G^c 에서 u^c, v^c 사이에 보조정리 3의 조건을 만족하는 서로 소인 경로가 4개의 경로를 $Q_1^c, Q_2^c, Q_3^c, Q_4^c$ 라 하고, 이들 중 가장 짧은 경로를 Q_4^c 라 한다. 보조정리 3에 의하여 각 경로는 길이가 2^k 이하이고, Q_4^c 는 길이가 $2^k - 1$ 이하이다. 그리고 Q_1^c, Q_2^c, Q_3^c 는 길이가 2이상이다. 이들 경로를 이용하여 u, v 사이의 길이가 $dia_{3k+1,k} + 2$ 이하인 7개의 경로를 구한다.

먼저 u 와 v 사이의 서로소인 3개의 경로 $Q_1^c(u, v), Q_2^c(u, v), Q_3^c(u, v)$ 를 구한다. 그러면 $1 \leq i \leq 3$ 에 대하여 $|Q_i^c(u, v)| \leq |Q_i^c| + dia_{k+1,k} \leq 2^k + dia_{k+1,k} = dia_{3k+1,k} + 1$ 이다.

Q_4^c 로부터 나머지 4개의 경로 P_1, P_2, P_3, P_4 를 다음과 같이 구한다. Q_4^c 에 의한 u 로부터의 경로 $Q_4^c(u)$ 의 마지막 정점을 u' 라 하자. $G_{0,0}$ 에서 u 와 인접한 3 정점을 s_1, s_2, s_3 이라 하고, $Q_4^c(s_1), Q_4^c(s_2), Q_4^c(s_3)$ 의 마지막 정점을 각각 t_1, t_2, t_3 이라 하자. 그러면 t_1, t_2, t_3 은 u' 와 인접하다. 그리고 Q_4^c 의 역경로에 의한 v 로부터의 경로에서 마지막 정점을 v' 라 하자.

경우 2-1 $u' = v$ 인 경우

$P_1 = (u, Q_4^c(s_1), v), P_2 = (u, Q_4^c(s_2), v), P_3 = (u, Q_4^c(s_3), v), P_4 = Q_4^c(u)$.

$1 \leq i \leq 3$ 에 대하여, Q_4^c 에 의한 u_i 로부터의 경로인 $Q_4^c(s_i)$ 의 마지막 정점은 v 와 인접함을 관찰하라. 각 $1 \leq i \leq 4$ 에 대하여, $|P_i| \leq 2^k + 1$ 이므로, 보조정리가 성립한다.

경우 2-2 $u' \neq v$ 인 경우

u' 와 v 에 대하여 사이에 보조정리 2를 만족하는 서로소인 3 경로들 중 t_1, t_2, t_3 을 지나는 경로를 각각 R_1, R_2, R_3 이라 하자. $|R_1| \geq |R_2| \geq |R_3|$ 이라 하자. $|R_1| \leq 2^k, |R_2| \leq 2^{k-1} + 1$ 이고, $|R_3| \leq 2^{k-1}$ 이다. $|R_1| \geq 3$ 임을 관찰하라. 그리고 $G_{0,0}$ 에서 u

와 v' 사이에 보조정리 2를 만족하는 3 경로가 있는데, 이들 중 s_3 을 지나는 경로로서 R_3 에 대응하는 경로를 R'_3 라 하자. $|R'_3| \leq 2^{k-1}$ 이다.

경우 2-2-1 $|Q_4^c| = 1$

$$P_1 = (u, s_1, R_1 - u'), P_2 = (u, s_2, R_2 - u'), P_3 = (R'_3, v), P_4 = (u, R_3).$$

u' 과 v 가 인접할 경우 t_1, t_2, t_3 중 v 와 동일한 정점이 있는데, $|R_1| \geq |R_2| \geq |R_3|$ 이므로 $R_3 = (u', v)$, $R'_3 = (u, v')$ 이다. u' 과 v 가 인접하면 t_3 과 v 가 같은 정점이고 s_3 과 v' 가 같은 정점임을 관찰하라.

u' 와 v 의 인접 유무에 관계없이, 보조정리 2에 의하여 $|R_1|, |R_2|, |R_3|, |R'_3| \leq 2^k$ 이므로, P_1, P_2, P_3, P_4 의 길이는 각각 $dia_{3k+1, k} + 1$ 이하이다

경우 2-2-2 $|Q_4^c| > 1$

$$P_1 = (u, Q_4^c(s_1), R_3), P_2 = (u, Q_4^c(s_2), R_2 - u').$$

P_1 은 u 에서 s_1 을 지나 경로 $Q_4^c(s_1)$ 를 따라 t_1 으로 간 후, u' 으로 가서 R_3 를 따라 v 로 가는 경로임을 관찰하라.

세 번째 경로 P_3 을 구한다. $R_1 - v$ 의 마지막 정점을 w 라 하고, Q_4^c 의 역경로에 의한 w 로부터의 경로에서 마지막 정점을 w' 라 하자. $P_3 = (R'_3, Q_4^c(w'), v)$.

P_3 은 u 에서 R'_3 을 따라 v' 으로 간 후, w' 을 가서 $Q_4^c(w')$ 을 따라 가서 v 로 가는 경로임을 관찰하라.

마지막 하나의 경로는 다음과 같이 구한다. $|Q_4^c| > 1$ 이므로 Q_4^c 상에서 u^c 와 v^c 이외의 정점을 w^c 가 존재한다. Q_4^c 를 u^c 와 w^c 사이의 경로인 Q 와 w^c 와 v^c 사이의 경로 Q' 로 분할한다. Q 에 의한 u 로부터의 경로에서 마지막 정점을 u'' 이라 하고, Q' 의 역경로에 의한 v 로부터의 경로에서 마지막 정점을 v'' 이라 하자. u'' 과 v'' 은 w^c 에 대응하는 부재귀원형군의 정점이다. 그리고 Q 에 의한 v' 로부터의 경로에서 마지막 정점이 v'' 임을 관찰하라.

w^c 에 대응하는 부재귀원형군에서 u'' 과 v'' 사이의 3 개의 서로소인 경로들 중에서, R_3 에 대응하는 경로를 P 이라 하자.

$$P_4 = (Q(u), P, Q'(v'')).$$

P_1, P_2, P_3, P_4 는 u 와 v 사이의 서로소인 경로들이고, $|P_1| \leq 2^k + 2^{k-1} + 1$, $|P_2| \leq 2^k + 2^{k-1}$, $|P_3| \leq 2^k + 2^{k-1} + 1$, $|P_4| \leq 2^k + 2^{k-1} - 1$ 이다.

$2k+1 < m \leq 3k$ (분지수가 6)인 $G(2^m, 2^k)$ 의 경우는 $m = 3k+1$ 인 경우와 비슷하게 보일 수 있다. u 를 $G_{0,0}$ 의 정점인 v_0^0 라 가정한다. 보조정리의 조건을 만족하는 u, v 사이의 6개의

경로를 다음과 같이 찾는다. $dia_{m,k} = dia_{m-2k,k} + 2^k - 1$ 이고, $2 \leq m - 2k \leq k$ 이므로 $dia_{m,k} = 2^{m-2k-1} + 2^k - 1 \geq 2^k + 1$ 이다.

경우 1 v 가 G_0 의 정점일 경우

이 경우는 $m = 3k + 1$ 의 경우와 비슷하게 보일 수 있다.

경우 2 v 가 G_0 의 정점이 아닐 경우

v 가 부채귀원형군 $G_{i,j}$ 의 정점이라 하자. u 가 속해있는 $G_{0,0}$ 와 v 가 속해있는 $G_{i,j}$ 는 각각 길이가 2^{m-2k} 인 사이클과 동형이다. $Q_1^c, Q_2^c, Q_3^c, Q_4^c$ 는 $m = 3k + 1$ 인 경우에서처럼 정의된다. 먼저 3개의 경로 $Q_1^c(u, v), Q_2^c(u, v), Q_3^c(u, v)$ 를 구한다. $1 \leq i \leq 3$ 에 대하여, $|Q_i^c(u, v)| \leq |Q_i^c| + dia_{m-2k,k} \leq 2^k + dia_{m-2k,k} = dia_{m,k} + 1$ 이다.

Q_4^c 로부터 나머지 3개의 경로 P_1, P_2, P_3 을 다음과 같이 구한다. Q_4^c 에 의한 u 로부터의 경로인 $Q_4^c(u)$ 의 마지막 정점을 u' 라 하자. $G_{0,0}$ 에서 u 와 인접한 두 정점을 s_1, s_2 라 하고, $Q_4^c(s_1), Q_4^c(s_2)$ 의 마지막 정점을 각각 t_1, t_2 라 하자. 그러면 t_1, t_2 는 u' 와 인접하다. 그리고 Q_4^c 의 역경로에 의한 v 로부터의 경로에서 마지막 정점을 v' 라 하자.

경우 2-1 $u' = v$ 인 경우

$$P_1 = (u, Q_4^c(s_1), v), P_2 = (u, Q_4^c(s_2), v), P_3 = Q_4^c(u).$$

각 $1 \leq i \leq 3$ 에 대하여, $|P_i| \leq 2^k + 1$ 이므로, 보조정리가 성립한다.

경우 2-2 $u' \neq v$ 인 경우

길이가 2^{m-2k} 인 사이클과 동형인 $G_{0,0}$ 에서 u 와 v' 사이에서 서로소인 두 경로들로서 s_1, s_2 를 지나는 경로를 각각 R_1, R_2 라 하자. $|R_1| \geq |R_2|$ 이라 가정하자. 그리고 길이가 2^{m-2k} 인 사이클과 동형인 $G_{i,j}$ 에서 u' 과 v 사이에서 서로소인 두 경로 중 t_1, t_2 를 지나는 경로를 각각 R'_1, R'_2 라 하자. $|R'_1| \geq |R'_2|$ 이다.

경우 2-2-1 $|Q_4^c| = 1$

$$P_1 = (u, s_1, R'_1 - u'), P_2 = (R_2, v), P_3 = (u, R'_2).$$

u' 과 v 가 인접할 경우 t_1, t_2 중 v 와 동일한 정점이 있는데, $|R'_1| \geq |R'_2|$ 이므로 $t_2 = v$ 임을 관찰하라. $|R'_1| \leq 2^{m-2k} - 1$ 이고 $|R_2|, |R'_2| \leq 2^{m-2k-1}$ 이고, $m - 2k \leq k$ 이다. 따라서 $|P_1| \leq 2^{m-2k} \leq 2^k$, $|P_2|, |P_3| \leq 2^{m-2k-1} + 1$ 로서 보조정리의 조건을 만족한다.

경우 2-2-2 $|Q_4^c| > 1$

$$P_1 = (u, Q_4^c(s_1), R'_2).$$

P_1 은 u 에서 s_1 을 지나 경로 $Q_4^c(s_1)$ 를 따라 t_1 으로 간 후, u' 으로 가서 R'_2 를 따라 v 로 가

는 경로임을 관찰하라.

두 번째 경로 P_2 를 구한다. $R_1 - v'$ 의 마지막 정점을 w' 이라 하자. $P_2 = (R_2, Q_4^c(w'), v)$.

P_2 은 u 에서 R_2 을 따라 v' 으로 간 후, w' 을 가서 $Q_4^c(w')$ 을 따라 가서 v 로 가는 경로임을 관찰하라.

마지막 하나의 경로는 $m = 3k + 1$ 인 경우에서 P_4 와 같이 구한다. $|Q_4^c| > 1$ 이므로 Q_4^c 상에서 u^c 와 v^c 이외의 정점을 w^c 가 존재한다. Q_4^c 에서 u^c 와 w^c 사이의 경로인 Q 와 w^c 와 v^c 사이의 경로 Q' 로 분할할 수 있다. Q 에 의한 u 로부터의 경로에서 마지막 정점을 u'' 이라 하고, Q' 의 역경로에 의한 v 로부터의 경로에서 마지막 정점을 v'' 이라 하자. u'' 과 v'' 은 w^c 에 대응하는 부재귀원형군의 정점이다. 그리고 Q 에 의한 v' 로부터의 경로에서 마지막 정점이 v'' 임을 관찰하라.

w^c 에 대응하는 부재귀원형군에서 u'' 과 v'' 사이의 2 개의 서로소인 경로들 중, R_2 에 대응하는 u'' 과 v'' 사이의 경로를 P 이라 하자.

$P_3 = (Q(u), P, Q'(v''))$.

각 경로의 길이를 분석하면 다음과 같다. $|P_1| \leq 2^k + 2^{m-k-1} + 1$, $|P_2| \leq 2^k + 2^{m-k-1} + 1$, $|P_3| \leq 2^k + 2^{m-k-1} - 1$ 로서 모두 $dia_{m,k} + 2$ 이하이다. \square

보조정리 8 지름이 3 이상인 r -정규그래프 G 의 고장지름은 지름+1 이상이다.

증명 G 에서 어떤 두 정점 u, v 에 대하여 u, v 사이의 최단 경로의 거리가 지름과 같다. 이 최단경로를 P 라 하자. u 와 인접한 P 상의 정점을 w 라 하자. w 와 인접한 정점들 중 u 를 제외한 모든 정점들이 고장이라 하자. 여기서 지름이 3이상이므로 w 와 v 는 인접하지 않다. w 로부터 v 까지 가는 최단경로는 w 에서 u 로 간 후, u 로부터 v 까지 최단 경로로 가는 것이다. 그러면 w 로부터 v 까지 가는 최단경로는 지름+1이 이상이 된다. \square

따름정리 2 $k \geq 3$, $m > k + 1$ 인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 에서

1) $m \equiv 1 \pmod{2k}$ 이면 고장지름은 $dia_{m,k} + 1$ 이고,

2) $m \not\equiv 1 \pmod{2k}$ 이면 고장지름은 $dia_{m,k} + 2$ 이하이다.

증명 $m \equiv 1 \pmod{2k}$ 이면, 보조정리 6, 정리 1과 보조정리 8로부터 고장지름은 $dia_{m,k} + 1$ 이다. $m \not\equiv 1 \pmod{2k}$ 일 경우, 보조정리 5, 보조정리 7과 정리 1로부터 고장지름은 $dia_{m,k} + 2$ 이하이다. \square

그런데 $k \geq 3$, $m > k + 1$ 인 모든 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 의 고장지름이 $dia_{m,k} + 1$ 과 같지는 않다. 분지수가 4인 재귀원형군 $G(2^5, 2^3)$ 를 고려해 보자. v_0^0 와 인접한 4 정점 중 v_1^0 ,

v_0^1, v_3^0 이 고장이라고 하자. 그러면 v_0^0 와 v_0^2 사이의 최단 경로 P 는 다음과 같다:

$$P = (v_0^0, v_3^7, v_0^7, v_0^6, v_0^5, v_0^4, v_0^3, v_0^2).$$

이 경로의 길이는 7이다. 그런데 성질 1로부터 $k < m \leq 2k$ 인 $G(2^m, 2^k)$ 의 지름 $dia_{m,k} = 5$ 이다. 그러므로 $G(2^5, 2^3)$ 의 고장지름은 $dia_{5,3} + 2$ 이다.

정리 1로부터 기본적인 경우로서, $k \geq 3$ 이고 $n > k + 1$ 인 $G(2^n, 2^k)$ 에서 인접하지 않은 모든 두 정점 사이에 길이가 $dia_{n-2k,k} + 1$ 이하인 서로소인 경로가 $\delta_{n-2k,k}$ 개 존재하는 것을 보이면 모든 $G(2^{n+2p}, 2^k)$, $p \geq 1$ 의 고장지름이 지름+1이 됨을 보이는 것이 된다. 기본적인 경우에 이를 보이는 것은 앞으로 연구해야 할 과제이다.

4. 결론

본 논문에서는 $k \geq 3$ 인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 의 고장지름을 분석하였다. 고장지름이란 분지수-1 개 이하의 임의의 정점들이 고장이 났을 때, 모든 두 노드 사이의 고장이 없는 최단경로 길이의 최대 값이다. $m \leq k$ 인 경우, 고장지름은 $2^m - 2$ 이고, $m = k + 1$ 일 경우 고장지름은 $2^k - 1$ 임을 보였다. 그리고 $k \geq 3$, $m > k + 1$ 인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 에서, $m \equiv 1 \pmod{2k}$ 이면 고장지름은 $dia_{m,k} + 1$ 과 같고, $m \not\equiv 1 \pmod{2k}$ 이면 고장지름은 $dia_{m,k} + 2$ 이하이다. $m > 2k$ 인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 의 고장지름이 지름+1과 같게 되는 m, k 를 규명하는 것은 앞으로 계속 연구해야 할 과제이다.

참고문헌

- [1] K. Day and A. E. Al-Ayyoub, "Fault diameter of k-ary n-cube networks," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems* **8(9)**, pp. 903-907, 1997.
- [2] M. S. Krishnamoorthy and B. Krishnamurthy, "Fault diameter of interconnection networks," *Computing Mathematical Applications* **13**, pp. 577-582, 1987.
- [3] S. Latifi, "Combinatorial analysis of the fault-diameter of the n-cube," *IEEE Trans. Computers* **42(1)**, pp. 27-33, 1993.
- [4] Y. Rouskov and P. K. Srimani, "Fault diameter of star graphs," *Information Processing Letters* **48**, pp. 243-251, 1993.
- [5] J.-J. Sheu and L.-H. Hsu, "Fault diameter for subcubes," *Parallel Processing Letters* **9(1)**, pp. 21-30, 1999.
- [6] C.-P. Chang, J.-N. Wang, L.-H. Hsu, "Topological properties of twisted cube," *Information Sciences* **113**, pp. 147-167, 1999.
- [7] J.-H. Park and K.-Y. Chwa, "Recursive circulant: a new topology for multiprocessor

- networks,” in Proc. *International Symposium on Parallel Architectures, Algorithms and Networks ISPAN'94*, Kanazawa, Japan, pp. 73–80, 1994.
- [8] J.-H. Park and K.-Y. Chwa, “Recursive circulants and their embeddings among hypercubes,” *Theoretical Computer Science* **244**, pp. 35–62, 2000.
- [9] 김희철, 김상범, 좌경룡, “재귀원형군의 고장지름,” *한국정보과학회 가을 학술발표회* **21(2)**, pp. 663–666, 1994.
- [10] 박정흠, 좌경룡, “재귀원형군의 위상 특성: 서로소인 경로,” *정보과학회논문지(A)* **26(8)**, pp. 1009–1023, 1999.