고장난 스타 그래프에서 최장 경로와 사이클*

박 정흠○, 김 희철†

○가톨릭대학교 컴퓨터·전자공학부 (jhpark@tcs.cuk.ac.kr)

†한국외국어대학교 컴퓨터및정보통신공학부 (hckim@maincc.hufs.ac.kr)

Longest Paths and Cycles in Faulty Star Graphs

Jung-Heum Park○ and Hee-Chul Kim†

○School of Computer Science and Electronic Engineering, The Catholic University of Korea

†School of Computer and Information Communications Engineering, Hankuk University of Foreign Studies

요약

이 논문은 n-차원 스타 그래프 S_n, $n \geq 4$에서 정점과 에지 고장의 수가 $n-3$ 이하일 때, 임의의 두 고장이 아닌 정점 사이에 길이가 두 정점의 색이 같으면 $n!-2f_v-2$ 이상이고, 색이 다르면 $n!-2f_v-1$ 이상인 경로가 존재함을 보인다. 여기서 f_v는 고장인 정점의 수이다. 이 결과를 이용하면 고장의 수가 $n-3$ 이하일 때, 임의의 고장이 아닌 에지를 지나는 길이 $n!-2f_v$ 이상인 사이클을 설계할 수 있다.

1 서론

스타 그래프는 널리 알려진 연결망 구조이다. n-차원 스타 그래프 S_n의 정점 집합은 $\{1, 2, \cdots, n\}$의 모든 순열이고, 한 순열의 첫번째 심볼과 k, $2 \leq k \leq n$번째 심볼을 서로 바꾼 순열에 대응하는 정점간에 서로 에지가 있다. 첫번째 심볼과 k번째 심볼을 바꾸어 생긴 에지를 k-차원 에지라고 부른다. 스타 그래프의 예가 그림 1 (a)에 있다.

스타 그래프 S_n은 정점 대칭이고, 에지 대칭이다. S_n의 분지수와 연결도는 $n-1$, 지름은 $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$이다 [2]. S_n은 strongly hierarchical하다고 부르는 재귀적 구조를 가진다. 다시 말하면, $2 \leq k \leq n$인 임의의 k에 대해서, k-차원 에지를 제거하면 n개의 S_{n-1}로 분할된다. 그림 1 (a)는 4-차원 에지를, (b)와 (c)는 각각 3-차원 에지, 2-차원 에지를 제거하면 S_3로 분할할 수 있음을 보여준다.

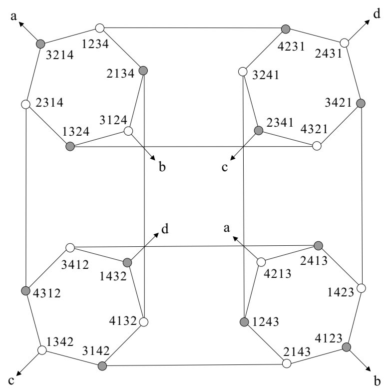
S_n은 이분 그래프이고 해밀톤 사이클을 가지고 있다. 더구나 서로 다른 색을 가진 정점 사이에는 해밀톤 경로를 가지고 있고, 같은 색을 가진 정점 사이에는 길이 $n!-2$인 경로가 존재한다 [3]. 그러나 정점에 고장이 하나 발생하면 해밀톤 사이클을 가지지 못한다.

S_n에서 고장인 정점의 집합을 F_v, 고장인 에지의 집합을 F_e라고 하자. $F = F_v \cup F_e$, $f_v = |F_v|$, $f_e = |F_e|$, $f = f_v + f_e$라고 하자. S_n에 정점 고장만 발생하여 $f = f_v \leq n-2$일 때, 길이 $n!-2f_v$ 이상인 사이클이 존재한다 [5]. 또한 $f \leq n-3$일 때, 길이가 $n!-4f_v$ 이상인 사이클을 가지고 있음이 알려져 있다 [8].

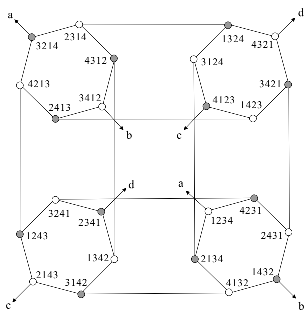
N개의 정점을 가진 이분 그래프에서 서로 다른 색을 가진 정점 사이에 길이가 $N-2f_v-1$ 이상인 경로나, 같은 색을 가진 정점 사이에 길이가 $N-2f_v-2$ 이상인 경로를 *L-경로*라고 부른다. 그리고 길이가 $N-2f_v$ 이상인 사이클을 *L-사이클*이라고 하자. $f_v = 0$이면, L-사이클은 해밀톤 사이클이다. 여기서 정의한 L-경로와 L-사이클은 최악의 경우 그 길이가 최장이다.

이 논문에서는 S_n, $n \geq 4$는 $f \leq n-3$일 때 임의의 고장이 아닌 두 정점 사이에, 두 정점을 잇는 L-경로가 존재함을 보인다. 인접한 두 정점 v, w를 잇는 L-경로에 에지 (v, w)를 추가하면 L-사이클이 된다. 이 결과는 $f \leq n-3$일

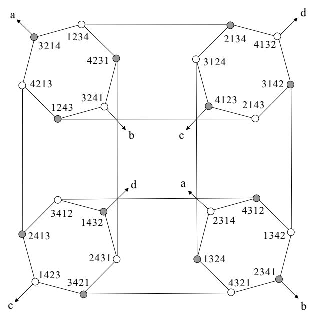
*이 논문은 한국과학재단 지역대학 우수과학자 지원연구(2000-1-30300-014-3)의 연구비를 지원받았음.



(a)



(b)



(c)

그림 1: S_4

때 임의의 고장이 아닌 에지를 지나는 L-사이클이 존재함을 의미한다.

스타 그래프 이외의 연결망 구조에 대해서 정점이나 에지에 고장이 발생하였을 때 길이가 긴 사이클에 대한 연구로 [1,4,6,7] 등이 있다.

2 스타 그래프 S_n의 L-경로

이 절에서는 스타 그래프 S_n, $n \geq 4$는 $f \leq n-3$일 때, 임의의 정점쌍 v, w를 잇는 L-경로가 존재함을 보인다. 먼저 고장인 요소의 수가 하나 이하인 S_4를 고려하기로 한다. 고장인 요소가 없는 S_4인 경우는 [3]에서 설계한 경로가 L-경로가 된다. 고장이 하나인 경우를 고려하는데, 정점 고장인 경우를 먼저 생각한다.

스타 그래프가 정점 대칭이므로 일반성을 잃지 않고, 검정색 정점 3214가 고장이라고 가정한다. 고장 정점을 제외하고 모든 정점쌍 사이에 L-경로가 존재함을 보여야 한다. 그림 1을 잘 관찰하면, 경로의 끝정점 하나가 흰색 정점인 경우에는 $\{1234, 3214, 2431\}$만을 고려하면 충분함을 알 수 있다. 양 끝정점이 모두 검정색인 경우도, 그 한쪽은 $\{4231, 3421, 2341\}$인 경우만 고려하면 된다.

두 흰색 정점간에는 길이 $4!-2$, 흰색과 검정색 정점간에는 길이 $4!-3$, 검정색 정점간에는 길이 $4!-4$인 경로가 존재함을 보일 수 있다. 이들 경로는 당연히 L-경로가 된다. 여기서 이들 경로를 보이는 것은 생략하기로 한다.

S_4에서 에지 고장이 하나 있는 경우를 고려한다. S_4가 에지 대칭이기도 하므로, 일반성을 잃지 않고 에지 $(3214, 4213)$이 고장이라고 가정한다. 모든 정점쌍 사이에 L-경로가 있음을 보여야 하지만, 아래 그림 2를 그림 1 (a)와 비교 관찰하면 $\{1234, 3124, 4213, 1423, 3241, 2431, 4321\}$을 한 끝점으로 가지는 경로만 고려하면 된다는 것을 알 수 있다.

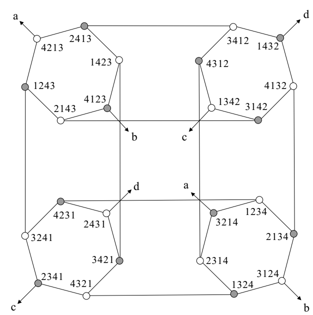


그림 2: S_4의 다른 표현

에지 고장인 경우, 서로 다른 색을 가진 정점간에는 길이 $4!-1$, 서로 같은 색을 가진 정점간에는 길이 $4!-2$인 경로를 설계할 수 있다. 설계된 경로를 보이는 것은 생략하기로 한다.

보조정리 1 *S_4는 $f \leq 1$일 때, 임의의 정점쌍 v, w를 잇는 L-경로가 존재한다.*

정리 1 *스타 그래프 S_n, $n \geq 4$는 $f \leq n-3$일 때, 임의의 정점쌍 v, w를 잇는 L-경로가 존재한다.*

증명 n에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다. $n=4$인 경우는 위 보조 정리 1에 의해서 성립한다. $n \geq 5$라고 가정한다. 우선 S_n을 n개의 S_{n-1}, S^1_{n-1}, S^2_{n-1}, $\cdots$, S^n_{n-1}으로 분할하여, S^i_{n-1}, $1 \leq i \leq n$에 속한 고장인 요소의 수가 $n-4$ 이하가 될수 있음을 보인다. $f \leq n-4$인 경우는 당연하므로, $f = n-3$이라고 하자. $f_e \geq 1$인 경우는 고장인 에지를 포함하는 차원의 에지로 분할하면 된다. 모두 정점 고장인 경우, 서로 다른 두 고장 정점 $x = a_1a_2\cdots a_n$, $y = b_1b_2\cdots b_n$에서 $a_k \neq b_k$인 k, $2 \leq k \leq n$이 존재한다. k-차원 에지로 분할하면 두 정점은 서로 다른 S_{n-1}에 속하게 된다. 이제 귀납적 가설에 의해서, S^i_{n-1}는 고장인 요소의 수가 $n-4$ 이하이

므로, 임의의 두 정점을 잇는 L-경로가 존재한다. S_n에 속한 고장이 아닌 임의의 두 정점 v와 w를 잇는 L-경로를 설계하고자 한다.

경우 1 v, w가 모두 어떤 S_{n-1}^i에 속한 경우

일반성을 잃지 않고, v, w가 S_{n-1}^1에 속한다고 하자. S_{n-1}^1에서 v와 w를 잇는 L-경로를 P_1이라고 하자. 이 경로상에서 인접한 두 정점을 v_1, w_1을 선택하여 P_1을 v에서 v_1까지의 경로 P_1', 에지 (v_1, w_1), w_1에서 w까지의 경로 P_1''으로 나눈다. 이 때, 각각 v_1, w_1에 인접하면서 S_{n-1}^i에 속하지 않는 정점 w_2, v_n은 고장이 아니며 그 들 사이의 에지 (v_1, w_2), (v_n, w_1)도 고장이 아닌 것으로 선택한다. 이것이 가능한 것은 P_1의 길이가 고장의 수보다 충분히 길어 두 배를 넘기 때문이다. w_2는 S_{n-1}^2, v_n은 S_{n-1}^n에 속한다고 가정한다.

이제 다음 조건을 만족하는 정점쌍 v_i, w_{i+1}, $2 \le i < n$을 선택한다: (i) v_i는 S_{n-1}^i, w_{i+1}는 S_{n-1}^{i+1} 속하며 고장이 아니다, (ii) v_i는 v_1과 같은 색이고 w_{i+1}은 w_1과 같은 색이다, (iii) (v_i, w_{i+1})은 고장이 아닌 에지이다. 이것이 가능한 것은 S_{n-1}^i과 S_{n-1}^{i+1} 사이에는 $(n-1)!/(n-1) = (n-2)!$개의 에지가 있고, 그들 에지의 정확히 반은 S_{n-1}^i에 속하는 끝정점이 흰색이고 나머지 반은 검정색이기 때문이다.

S_{n-1}^i에서 w_i와 v_i를 잇는 L-경로를 P_i라고 하자. 경로 P_1', P_1'', $P_2, \cdots, P_n$과 에지 $(v_1, w_2), (v_2, w_3), \cdots, (v_{n-1}, w_n)$, 그리고 (v_n, w_1)은 v와 w를 잇는 경로 P가 된다. S_{n-1}^i, $i \ge 2$에서 P에 속하지 않는 정점은 S_{n-1}^i에 있는 고장인 정점 수의 두배를 넘지 않고 또한 P_1이 S_{n-1}^1의 L-경로이므로 P는 L-경로가 된다.

경우 2 v는 S_{n-1}^i, w는 S_{n-1}^j에 속하고, $i \ne j$인 경우

일반성을 잃지 않고 v는 S_{n-1}^1, w는 S_{n-1}^n에 속하고 하자. 경우 1과 유사하게 다음 조건을 만족하는 정점쌍 v_i, w_{i+1}, $1 \le i < n$을 선택한다: (i) v_i는 S_{n-1}^i, w_{i+1}는 S_{n-1}^{i+1} 속하며 고장이 아니다, (ii) v_i는 v와 다른 색이고, w_{i+1}은 v와 같은 색이다, (iii) (v_i, w_{i+1})은 고장이 아닌 에지이다. S_{n-1}^1에서 v와 v_1을 잇는 L-경로를 P_1, S_{n-1}^i, $2 \le i < n$에서 w_i와 v_i를 잇는 L-경로를 P_i, S_{n-1}^n에서 w_n과 w를 잇는 L-경로를 P_n이라고 하자. $P_1, P_2, \cdots, P_n$과 함께 $(v_1, w_2), (v_2, w_3), \cdots, (v_{n-1}, w_n)$은 v와 w를 잇는 L-경로가 된다. □

따름정리 1 *S_n, $n \ge 4$는 $f \le n-3$일 때 임의의 고장이 아닌 에지를 지나는 L-사이클을 가진다.*

따름정리 2 *S_n, $n \ge 4$는 $f_v = 0$이고 $f_e \le n-3$일 때 임의의 고장이 아닌 에지를 지나는 해밀톤 사이클을 가진다. 즉, 에지 해밀톤 그래프가 된다.*

3 결론

이 논문은 스타 그래프 S_n, $n \ge 4$는 $f \le n-3$일 때, 임의의 고장이 아닌 두 정점을 잇는 L-경로가 있음을 보였다. 이 논문에서 제시한 방식을 따르면, S_4의 L-경로를 이용하여 S_n, $n \ge 5$의 L-경로를 재귀적으로, 아주 간단히 설계할 수 있다. 이 논문에서 언급하지 않았지만, S_4에서 설계한 L-경로를 이용하면 S_n, $n \ge 4$는 정점이나 에지 고장이 하나 이하일 때, strongly hamiltonian-laceable함을 정리 1과 유사한 방식으로 보일 수 있다.

참고문헌

[1] 박 정흠, 김 희철, "m과 n이 짝수인 이중 루프 네트워크 $G(mn; 1, m)$의 고장 해밀톤 성질," *한국정보과학회 논문지* **27(10)**, pp. 868-879, 2000년 10월.

[2] S.B. Akers and B. Krishnamurthy, "A group-theoretic model for symmetric interconnection networks," *IEEE Trans. Computers* **38(4)**, pp. 555-566, 1989.

[3] S.-Y. Hsieh, G.-H. Chen, and C.-W. Ho, "Hamiltonian-laceability of star graphs," *Networks* **36(4)**, pp. 225-232, 2000.

[4] H.-C. Kim and J.-H. Park, "Fault hamiltonicity of two-dimensional torus networks," in *Proc. Workshop on Algorithms and Computation WAAC'00*, Tokyo, Japan, pp. 110-117, July 2000.

[5] S. Latifi, N. Bagherzadeh, and R.R. Gajjala, "Fault-tolerant embedding of linear arrays and rings in the star graph," *Computers Elect. Engng.* **23(2)**, pp. 95-107, 1997.

[6] A. Sengupta, "On ring embedding in hypercubes with faulty nodes and links", *Inform. Proc. Lett.* **68**, pp. 207-214, 1998.

[7] T.-Y. Sung, C.-Y. Lin, Y.-C. Chuang, and L.-H. Hsu, "Fault tolerant token ring embedding in double loop networks," *Inform. Proc. Lett.* **66**, pp. 201-207, 1998.

[8] Y.-C. Tseng, S.-H. Chang, and J.-P. Sheu, "Fault-tolerant ring embedding in a star graph with both link and node failures," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems* **8(12)**, pp. 1185-1195, 1997.