

하이퍼큐브형 상호연결망의 비쌍형 다대다 서로소인 경로 커버

박 정흠

가톨릭대학교 컴퓨터정보공학부
420-743 경기도 부천시 원미구 역곡 2동 산 43-1
j.h.park@catholic.ac.kr
전화 (02) 2164-4366, 팩스 (02) 2164-4777

Unpaired Many-to-Many Disjoint Path Covers in Hypercube-Like Interconnection Networks

Jung-Heum Park

School of Computer Science and Information Engineering
The Catholic University of Korea
Yokkok 2-dong 43-1, Wonmi-gu, Puchon City, Kyonggi-do 420-743
j.h.park@catholic.ac.kr
TEL (02) 2164-4366, FAX (02) 2164-4777

* 본 연구는 2005년도 가톨릭대학교 교비연구비의 지원으로 이루어졌음.

하이퍼큐브형 상호연결망의 비쌍형 다대다 서로소인 경로 커버

Unpaired Many-to-Many Disjoint Path Covers in Hypercube-Like Interconnection Networks

요약

그래프 G 의 비쌍형 다대다 k -서로소인 경로 커버(k -DPC)는 k 개의 서로 다른 소스 정점과 싱크 정점을 연결하며 그래프에 있는 모든 정점을 지나는 k 개의 서로소인 경로 집합을 말한다. 여기서 한 소스는 임의의 한 싱크와 짝지어질 수 있다. 이 논문에서는 하이퍼큐브형 상호연결망의 한 부류인 제한된 HL-그래프에서 비쌍형 다대다 DPC를 고려하여, 고장인 요소(정점이나 에지)의 수가 f 이하인 모든 m -차원 제한된 HL-그래프($m \geq 3$)는 $f + k \leq m - 2$ 을 만족하는 임의의 $f \geq 0$, $k \geq 1$ 에 대하여 비쌍형 다대다 k -DPC를 가짐을 보인다.

키워드: 서로소인 경로 커버, 하이퍼큐브형 상호연결망, 강한 해밀톤 성질, 고장 해밀톤 성질

Abstract

An *unpaired many-to-many k -disjoint path cover (k -DPC)* of a graph G is a set of k disjoint paths joining k distinct sources and sinks in which each vertex of G is covered by a path. Here, a source can be freely matched to a sink. In this paper, we investigate unpaired many-to-many DPC's in a subclass of hypercube-like interconnection networks, called restricted HL-graphs, and show that every m -dimensional restricted HL-graph, $m \geq 3$, with f or less faulty elements (vertices and/or edges) has an unpaired many-to-many k -DPC for any $f \geq 0$ and $k \geq 1$ with $f + k \leq m - 2$.

Key words: Disjoint path covers, hypercube-like interconnection networks, strong hamiltonicity, fault-hamiltonicity

1 서론

노드들 사이의 라우팅(routing)이나 선형 배열(linear arrays)의 임베딩(embedding) 등과 관련하여 여러 상호연결망(interconnection networks)에서 중요한 문제 중의 하나는 노드가 서로소인 경로(node-disjoint paths)를 찾는 것이다. 노드가 서로소인 경로는 노드들 사이에 효율적인 데이터 라우팅을 위한 병렬 경로로 사용될 수 있다. 또한 노드가 서로소인 경로에서 각 경로는 파이프라인(pipeline) 계산에 이용될 수도 있다. 상호연결망은 자주 그래프로 모델되는데, 정점과 에지는 각각 노드와 통신 링크에 대응한다. 이 논문에서 노드가 서로소인 경로를 간단히 서로소인 경로라고 부르기로 한다.

서로소인 경로는 다음과 같이 크게 세 가지로 분류할 수 있다: 일대일(*one-to-one*), 일대다(*one-to-many*), 다대다(*many-to-many*). 연결도(connectivity)가 k 인 그래프 G 가 있다고 하자. Menger의 정리를 따르면 G 의 서로 다른 두 노드 사이에 k 개의 서로소인 경로가 존재한다. 이것은 일대일 부류에 속하게 된다. Menger의 정리를 조금만 확장하면 한 노드에서 서로 다른 k 개의 노드 사이에 k 개의 서로소인 경로가 존재함을 보일 수 있다. 이것은 일대다 부류에 속한다. 마찬가지로 방식으로 확장하면 임의의 k 개의 노드로부터 다른 k 개의 노드 사이에 k 개의 서로소인 경로를 정의할 수 있다.

세 유형의 서로소인 경로가 그래프 G 에 있는 모든 정점을 지나는 것을 생각해 볼 수 있다. 서로소인 경로 커버(*disjoint path cover*)는 그래프의 모든 정점을 지나는 서로소인 경로들의 집합이다. 서로소인 경로 커버 문제는 모든 노드를 완전히 활용(utilization)하는 것이 중요한 응용과 관련된다. 선형 배열의 임베딩에서 커버는 모든 노드가 파이프라인 계산에 참여한다는 것을 의미한다. 서로소인 경로 커버에 대하여 연구된 것들로는, 일대일 경로 커버에 대하여 정점이나 에지에 고장이 없는 재귀원형군(*recursive circulant*)[1-2], 에지 고장이 있는 하이퍼큐브(*hypercubes*)[3]에 대한 연구가 있고, 하이퍼큐브형 상호 연결망에 대한 일대다 서로소인 경로 커버[4]와 다대다 서로소인 경로 커버[5-6]가, 그리고 이중 루프 네트워크에서 다대다 서로소인 경로 커버[7]가 발표되어 있다. k 개의 경로로 이루어진 일대일 서로소인 경로 커버는 k^* -*container*라고도 알려져 있다[2-3].

그래프 G 에서 $S \cap T = \emptyset$ 를 만족하는 k 개의 소스 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ 와 k 개의 싱크 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ 가 주어질 때, 모든 $1 \leq i \leq k$ 에 대하여 소스와 싱크를 연결하는 경로 P_i 들의 집합이 서로소이면서 그래프의 모든 정점을 커버하면, 즉 모든 $i \neq j$ 에 대하여 $V(P_i) \cap V(P_j) = \emptyset$ 이고 $\cup_{1 \leq i \leq k} V(P_i) = V(G)$ 이면 이들 경로들의 집합을 *다대다 k -서로소인 경로 커버*(*many-to-many k -disjoint path cover*)라고 부른다. 여기서 $V(P_i)$ 는 경로 P_i 에 속한 정점들의 집합이고, $V(G)$ 는 그래프 G 의 정점 집합이다. 소스와 싱크를 *터미널*(*terminal*)이라고도 부른다. 이때 소스 s_i 가 항상 싱크 t_i 와 짝지어지면 *쌍형 다대다 DPC*(*paired many-to-many DPC*)라고 부르고, 한 소스가 임의의 한 싱크와 짝지어질 수 있으면 *비쌍형 다대다 DPC*(*unpaired many-to-many DPC*)라고 한다. 모든 m -차원 제한

된 HL-graph($m \geq 3$)에는 $f + 2k \leq m - 1$ 을 만족하는 임의의 $f \geq 0, k \geq 1$ 에 대하여 쌍형 다대다 k -DPC가 존재함이 밝혀져 있다[6].

제한된 HL-그래프는 [8]에서 제안된 하이퍼큐브형 상호연결망 부류이다. 문헌에 소개된 많은 하이퍼큐브형 상호연결망이 제한된 HL-그래프 부류에 속한다는 사실이 [8]에서 밝혀졌다. 제한된 HL-그래프에 속하는 것들로는 twisted cube[9], crossed cube[10], multiply twisted cube[11], Möbius cube[12], Mcube[13], generalized twisted cube[14] 등이 있다. 하이퍼큐브형 상호연결망에서 제한된 HL-그래프가 아닌 것으로는 채귀원형군 $G(2^m, 4)$ [15]이 있고, ‘이분 그래프에 상당히 가까운’ twisted N -cube[16]가 있다. 채귀원형군 $G(2^m, 4)$ 은 (m 이 짝수인 경우는 아니지만) m 이 홀수인 경우는 역시 제한된 HL-그래프에 속한다고 알려져 있다.

한편, 고장이 있는 상호 연결망에 선형 배열과 링을 임베딩(embedding)하는 것은 병렬 처리에서 중요한 이슈의 하나이다. 그것은 정점이나 에지에 고장이 있는 그래프에서 길이가 가장 긴 경로와 사이클을 찾는 문제로 모델된다. 문헌에는 여러 다양한 연결망 그래프의 고장 해밀톤 성질이 연구되어 있다[8,17-19]. 임의의 노드 쌍 v, w 에 대해서 v 와 w 를 연결하는 해밀톤 경로를 가진 그래프를 *해밀톤 연결된(hamiltonian-connected)* 그래프라고 한다. 그래프 G 에 있는 f 개 혹은 그 이하의 요소에 고장이 발생하여 이들 고장난 요소를 삭제하더라도 G 가 해밀톤 사이클을 가지면, G 를 *f -고장 해밀톤 그래프(f -fault hamiltonian)*라고 말한다. f 개 혹은 그 이하의 요소에 고장이 발생하더라도 해밀톤 연결되어 있으면, *f -고장 해밀톤 연결된 그래프(f -fault hamiltonian-connected)*라고 한다. 모든 m -차원 제한된 HL-그래프는 $m - 3$ -고장 해밀톤 연결된 그래프이며 $m - 2$ -고장 해밀톤 그래프임이 밝혀져 있다[8].

비쌍형 다대다 서로소인 경로의 정의를 정점이나 에지 고장을 허용하도록 정의할 수 있다. $f + 2k \geq V(G)$ 를 만족하는 그래프 G 에서 고장인 요소의 수가 f 개 이하일 때, 고장인 요소를 제거하고 남은 그래프에서 크기가 k 인 임의의 소스 집합 S 와 싱크 집합 T 를 잇는 비쌍형 다대다 서로소인 경로 커버를 설계할 수 있으면 G 는 *f -고장 비쌍형 다대다 k -DPC*를 가진다고 말한다. 이 논문에서는 모든 m -차원 제한된 HL-그래프($m \geq 3$)에는 $f + k \leq m - 2$ 를 만족하는 임의의 $f \geq 0, k \geq 1$ 에 대하여 *f -고장 비쌍형 다대다 k -DPC*가 존재함을 보인다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서는 제한된 HL-그래프를 정의한다. 하이퍼큐브형 상호연결망의 비쌍형 다대다 서로소인 경로 커버를 3절에서 설계하고, 4절에서 결론을 맺기로 한다.

2 제한된 HL-그래프

정점의 수가 각각 n 인 두 그래프 G_0 와 G_1 이 있다고 하자. 그래프 G_i 의 정점 집합을 V_i , 에지 집합을 E_i 라고 나타내기로 한다. $V_0 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 이라고 하고, $V_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 이라고 하자. $\{1, 2, \dots, n\}$ 의 순열(permutation) $M = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ 에 대하여, 두 그래프 G_0 와 G_1 을 다음과 같이 $2n$ 개의 정점을 가진 하나의 그래프 $G_0 \oplus_M G_1$ 으로 묶을 수 있다: 정점 집합 $V = V_0 \cup V_1$ 이고, 에지 집합 $E = E_0 \cup E_1 \cup E_2$, 여기서 $E_2 = \{(v_i, v_{i_j}) | 1 \leq j \leq n\}$ 이다. 임의의 순열 M 에 대하여, G_0 와 G_1 을 묶어서 얻어지는 그래프를 $G_0 \oplus G_1$ 이라고 나타낸다. 여기서 G_0 와 G_1 각각을 $G_0 \oplus G_1$ 의 요소 그래프(component)라고 부른다. 아래 그림 1에 $G_0 \oplus G_1$ 의 예가 있다.

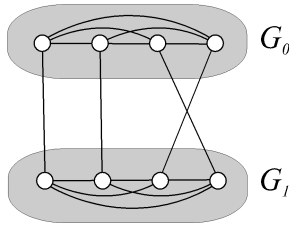
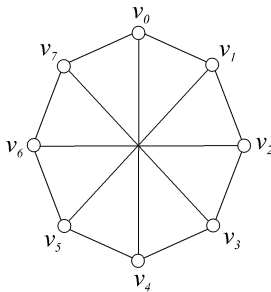
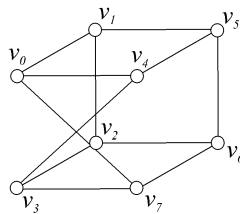


그림 1. $G_0 \oplus G_1$ 의 예.

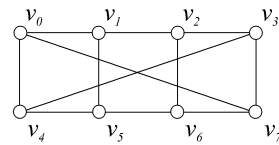
Vaidya 등[20]은 HL-그래프라고 불리는 하이퍼큐브형 상호연결망 부류를 제안하였다. HL-그래프는 위에서 정의한 \oplus 연산을 반복적으로 적용하여 다음과 같이 정의된다: $HL_0 = \{K_1\}$; $HL_m = \{G_0 \oplus G_1 | G_0, G_1 \in HL_{m-1}\}$, $m \geq 1$. 이 정의에 따라 다음을 얻을 수 있다: $HL_1 = \{K_2\}$, $HL_2 = \{C_4\}$, $HL_3 = \{Q_3, G(8,4)\}$, \dots . 여기서 K_1 , K_2 는 정점의 수가 각각 1, 2인 완전 그래프(complete graph)이고, C_4 는 정점의 수가 4인 사이클 그래프이다. 또한 Q_3 은 3-차원 하이퍼큐브이고, $G(8,4)$ 는 정점의 수가 8이고 각각 크기 1, 4인 점프를 가진 재귀원형군(recursive circulant)이다. 재귀원형군 $G(8,4)$ 는 아래 그림 2에서 보는 것과 같이, 3-차원 twisted cube와 동형(isomorphic)이며, 또한 정점의 수가 8인 뫼비우스 사다리(Möbius ladder)와도 동형이다.



(a) $G(8,4)$



(b) TQ_3



(c) 뫼비우스 사다리

그림 2. 동형인 그래프들.

HL_m 에 속한 임의의 그래프를 m -차원 HL-그래프라고 부른다. 이분 그래프가 아닌 모든 HL-그래프는 해밀톤 연결되어(hamiltonian-connected) 있으며, 모든 이분 그래프인 HL-그래프는 해밀톤 laceable(hamiltonian-laceable)하다고 [21]에서 밝혔다.

당연히 m -차원 HL-그래프에는 하이퍼큐브와 같은 이분 그래프가 포함되어 있다. 그것들은 임의의 $f \geq 0$ 에 대하여 f -고장 고장 해밀톤 연결되어 있지 못하고, 또한 임의의 $f \geq 1$ 에 대하여 f -고장 해밀톤 그래프가 되지 못한다. 하이퍼큐브형 상호연결망에서 f -고장 해밀톤 연결된 그래프인지 혹은 f -고장 해밀톤 그래프인지를 고찰한 최근 연구[8]에서 HL-그래프에 속하면서 ‘상당히 높은 정도로’ 이분 그래프가 아닌 그래프들의 부류를 정의하고 있다. 이분 그래프가 아닌 HL-그래프의 부류에 속하는, *제한된 HL-그래프(restricted HL-graphs)*라고 불리는 그래프 부류는 다음과 같이 재귀적으로 정의한다: $RHL_0=HL_0$, $RHL_1=HL_1$, $RHL_2=HL_2$; $RHL_3=HL_3 \setminus Q_3 = \{G(8, 4)\}$; $RHL_m = \{G_0 \oplus G_1 | G_0, G_1 \in RHL_{m-1}\}$, $m \geq 4$. RHL_m 에 속하는 그래프를 m -차원 *제한된 HL-그래프*라고 부른다.

3 비쌍형 다대다 서로소인 경로 커버 설계

이 절에서는 제한된 HL-그래프에서 비쌍형 다대다 서로소인 경로 커버를 설계한다. 먼저 정리 1을 증명하고, 이를 이용하여 정리 2를 증명하기로 한다.

정리 1 정수 $k \geq 2$ 라고 하자. G_i 는 $k' \leq k$ 이고 $f+k' \leq f+k$ 를 만족하는 임의의 $f \geq 0$, $k' \geq 1$ 에 대하여 f -고장 비쌍형 다대다 k' -DPC를 가지고 $f+k$ -고장 해밀톤 그래프라고 하자. 그러면 $G_0 \oplus G_1$ 은 $k' \leq k$ 이고 $f+k' \leq f+k+1$ 를 만족하는 임의의 $f \geq 0$, $k' \geq 1$ 에 대하여 f -고장 비쌍형 다대다 k' -DPC를 가지며 $f+k+1$ -고장 해밀톤 그래프이다.

정리 2 모든 m -차원 제한된 HL-그래프($m \geq 3$)는 $f+k \leq m-2$ 을 만족하는 임의의 $f \geq 0$, $k \geq 1$ 에 대하여 f -고장 비쌍형 다대다 k -DPC를 가지며 $m-2$ -고장 해밀톤 그래프이다.

$G_0 \oplus G_1$ 에 있는 정점 v 에 대하여 v 에 인접하면서 v 와 다른 요소 그래프에 속한 정점을 \bar{v} 로 나타내기로 한다. 고장이 아니고 터미널이 아닌 정점을 *자유 정점(free vertex)*이라고 하고, 두 자유 정점을 잇는 에지가 고장이 아니면 *자유 에지(free edge)*라고 부른다. 고장 요소의 집합을 F 라고 둔다. G_0, G_1 에 속한 고장 요소의 수를 각각 f_0, f_1 이라고 하고 G_0 와 G_1 사이에 있는 고장 에지의 수를 f_2 라고 하자. 그리고 G_0, G_1 에 있는 소스-싱크 쌍의 수

를 각각 k_0, k_1 이라고 하고, 나머지를 k_2 라고 한다. 일반성을 잃지 않고, $k_0 \geq k_1$ 을 가정하며, G_0 에는 소스와 싱크가 각각 $k_0 + k_2, k_0$ 개 있으며, G_1 에는 k_1 개의 소스와 $k_1 + k_2$ 개의 싱크가 있다고 가정한다. 이후로 비쌍형 다대다 k -DPC를 줄여서 k -DPC라고 부르기로 한다.

3.1 정리 1의 증명

먼저 $G_0 \oplus G_1$ 의 고장 해밀톤 성질, 즉 $G_0 \oplus G_1$ 이 $f + k$ -고장 해밀톤 연결되어 있고 $f + k + 1$ -고장 해밀톤 그래프임을 보이기로 한다. $f \geq 1$ 혹은 $k \geq 3$ 인 경우는 [8]에 이미 증명되어 있다. $f = 0$ 이고 $k = 2$ 인 경우는 [8]의 결과로부터 s, t 는 G_0 에 속하고 \bar{s} 와 \bar{t} 가 고장 정점일 때 s 와 t 를 잇는 해밀톤 경로를 찾으면 충분하다. 먼저 G_1 에서 고장인 정점을 제외하고 해밀톤 사이클 C 를 찾고, 그 사이클 상의 한 에지 (x, y) 를 선택한 다음 G_0 에서 $\{s, t\}$ 와 $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ 사이에 2-DPC를 찾아서 C 와 묶으면 된다.

이제 정리 1을 증명하기 위하여 $G_0 \oplus G_1$ 이 $f + 1$ -고장 k -DPC를 가짐을 보이면 충분하다. 조건에 의하여 $n \geq f + 2k$ 이고 $f + k \leq \delta(G_i) - 2$ 이다. 여기서 $n = |V(G_i)|$ 이고 $\delta(G_i)$ 는 G_i 의 최소 분지수이다. $k_0 + k_1 + k_2 = k$ 이고 $f_0 + f_1 + f_2 \leq f + 1$ 임에 유의한다.

경우 1: $k_2 = 0$

$k_1 \geq 1$ 일 때 G_0 와 G_1 에서 각각 f_0 -고장 k_0 -DPC, f_1 -고장 k_1 -DPC를 찾는다. 두 DPC의 존재는 명백하다. $k_1 = 0$ 이고 $f_0 = f + 1$ 일 때 먼저 G_0 에서 고장 요소 하나를 고장이 아닌 것으로 간주하여, 즉 가상의 비고장 요소를 두어 f -고장 k -DPC를 찾는다. 고장인 요소를 지나는 경로에서 고장인 요소 좌우의 두 정점을 x, y 라고 두고 G_1 에서 \bar{x}, \bar{y} 사이의 해밀톤 경로를 찾아서 G_0 의 DPC와 묶는다. $k_1 = 0$ 이고 $f_0 = f$ 일 때 G_0 에서 f -고장 k -DPC를 찾고 한 경로상의 에지 (x, y) 를 선택하는데 $\bar{x}, \bar{y}, (x, \bar{x}), (y, \bar{y}) \notin F$ 인 것으로 한다. G_1 에서 \bar{x}, \bar{y} 사이의 해밀톤 경로를 찾아 G_0 의 DPC와 묶는다.

마지막으로 $k_1 = 0$ 이고 $f_0 \leq f - 1$ 일 때를 고려한다. 먼저 G_0 에 터미널 x 가 존재하여 $\bar{x}, (x, \bar{x}) \notin F$ 를 만족하는 경우를 생각하자. x 를 소스라고 가정한다. 그러면 정점 $y \notin F$ 가 존재하여 $\bar{y}, (y, \bar{y}) \notin F$ 이다. 이때 y 는 싱크일 수 있다. G_0 에서 x 를 가상의 고장으로 두고 $f_0 + 1 + f_0'$ -고장 $k - f_0'$ -DPC를 찾는다. f_0' 은 y 가 싱크이면 1이고 그렇지 않으면 0이다. G_1 에서 f_1 -고장 1-DPC, 즉 \bar{x} 과 \bar{y} 사이의 해밀톤 경로를 찾아서 묶는다. 이제 위 조건을 만족하는 터미널 x 가 존재하지 않는다고 가정한다. $f_0 = f - 1$ 이면 항상 위 조건을 만족하

는 터미널 x 가 존재하므로 $f_0 \leq f-2$ 라고 가정한다. 이제 모든 터미널 z 에 대하여 \bar{z} 혹은 (z, \bar{z}) 가 고장이다. 자유 에지 (x, \bar{x}) 가 존재하여 x 와 어떤 소스 s 사이에 고장이 아닌 에지가 있음을 주장한다. $\delta(G_0)$ 개의 후보가 있고 이를 막는 후보가 $f+2k-2$ 개 있으며 이들 중 $2k-1$ 개는 중복된다는 사실로 이 주장은 증명된다. 또한 (x, \bar{x}) 와 다른 자유 에지 (y, \bar{y}) 가 존재함을 주장한다. 이 주장도 앞선 주장과 유사한 방법으로 증명할 수 있다. G_0 에서 s 와 x 를 가상의 고장으로 두고 f_0+2 -고장 k -DPC를 찾고 G_1 에서 \bar{x} 와 \bar{y} 사이의 해밀톤 경로를 찾아서 묶으면 된다.

경우 2: $k_2 \geq 1$ 이고 $k_0 \geq 1$

G_0 에 있는 임의의 k_2+1 개 소스 집합을 X 라고 하자. X 에 속한 소스 x 에 대하여 \bar{x} 가 자유 정점이고 $(x, \bar{x}) \notin F$ 인 소스의 수를 p , \bar{x} 가 싱크이고 $(x, \bar{x}) \in F$ 인 소스의 수를 q , 그리고 \bar{x} 가 소스이거나 혹은 \bar{x} 나 (x, \bar{x}) 가 고장인 소스의 수를 r 이라고 하자. 당연히 $p+q+r=k_2+1$ 이다.

먼저 $f_0 = f+1$, $k_1 = 0$ 의 두 조건이 동시에 만족되지 않는 경우를 다룬다. $p \geq k_2$ 일 때는 \bar{s}_i 가 자유 정점이고 $(s_i, \bar{s}_i) \notin F$ 인 k_2 개의 소스 s_1, s_2, \dots, s_{k_2} 에 대하여 이들을 가상의 고장으로 두고 G_0 에서 f_0+k_2 -고장 k_0 -DPC를 찾는다. 이 DPC의 존재는 $f_0 = f+1$, $k_1 = 0$ 의 조건이 동시에 만족되지 않는다는 가정이 근거한다. 그리고 $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_{k_2}$ 를 소스라고 두고 G_1 에서 f_1 -고장 k_1+k_2 -DPC를 찾아 묶는다. $p < k_2$ 일 때는 $q+r \geq 2$ 이다. G_0 와 G_1 사이에 $q+r-1$ 개의 자유 에지가 존재함을 주장한다. $n \geq f+2k$ 개의 후보가 있고 이들 중 최대 $(f+1)+2k-(q+r)$ 개를 제외한 나머지가 원하는 자유 에지가 되므로 주장이 증명된다. p 개의 소스를 가상 고장으로 두고 G_0 에서 f_0+p -고장 $k_0+(k_2-p)$ -DPC를 찾고, G_1 에서 f_1 -고장 k_1+k_2 -DPC를 찾아 묶으면 된다.

이제 $f_0 = f+1$, $k_1 = 0$ 이 동시에 만족된다고 하자. 이때 $r = 0$ 이고 $p+q = k_2+1$ 이다. X 에 속한 소스 중 둘을 제외한 나머지 X' 을 가상 고장으로 두고, 하나를 가상 자유 정점으로 두어 G_0 에서 $(f+1)+(k_2-1)$ -고장 k_0 -DPC를 찾는다. 서로소인 경로중 하나는 가상 자유정점으로 둔 소스 s_i 를 지나는데 이것을 $(s_j, \dots, x, s_i, \dots, t_a)$ 라고 하자. G_1 에서 f_1' -고장 k_2-f_1' -DPC를 찾는다. 여기서 f_1' 은 X' 에 속한 소스 중 G_1 에 있는 싱크와 인접한 것들의 수이다. 찾은 두 DPC를 묶으면 된다. $k_2 \geq 2$ 이거나 혹은 $k_2 = 1$ 이고 \bar{x} 가 싱크가 아니면 이 경우 증명이 끝난다. 그렇지 않으면 G_1 의 정점을 지나기 위해서 G_0 의 DPC중 한 경로가 지나는 에지 (y, z) 를 선택하여, G_1 에서 \bar{x} 를 가상 고장으로 두고 \bar{y} 와 \bar{z} 사이의 해밀톤 경

로를 찾아 G_0 의 DPC와 묶으면 된다.

경우 3: $k_2 = k$ ($k_0 = k_1 = 0$)

일반성을 잃지 않고 $f_0 \geq f_1$ 을 가정한다. 자유 에지가 k 개 존재하거나 혹은 그렇지 않으면 G_0 와 G_1 사이에 소스 s_i 가 존재하여 $\bar{s}_i, (s_i, \bar{s}_i) \in F$ 이고 또한 $k-1$ 개의 에지 (x, \bar{x}) 가 존재하여 x 는 자유 정점이고 $\bar{x}, (x, \bar{x}) \notin F$ 임을 주장한다. 이때 \bar{x} 는 싱크일 수 있다. 이 주장은 앞에서와 유사하게 후보들의 개수를 헤아려서 증명할 수 있으므로 생략한다.

먼저 $f_0 \leq f$ 일 때는 k 개의 자유 에지가 존재하면 G_0 와 G_1 에서 각각 f_0 -고장 k -DPC, f_1 -고장 k -DPC를 찾으면 되고, 그렇지 않으면 각각 f_0+1 -고장 $k-1$ -DPC, f_1+f_1' -고장 $k-f_1'$ -DPC를 찾으면 된다. 여기서 f_1' 은 $k-1$ 개의 에지 (x, \bar{x}) 중 \bar{x} 가 싱크인 것의 수이다.

마지막으로 $f_0 = f+1$ 이라고 하자. 자유 에지가 k 개 존재하거나 그렇지 않더라도 $k \geq 3$ 인 경우에는 G_0 에서 소스 하나를 가상의 자유 정점으로 두고 $f+1$ -고장 $k-1$ -DPC를 찾는다. 가상의 자유 정점인 소스 s_i 를 지나는 경로를 $(s_j, \dots, x, s_i, \dots, t_b)$ 라고 하자. \bar{x} 를 가상의 소스라고 두고 G_1 에서 f_1' -고장 $k-f_1'$ -DPC를 찾아 묶으면 된다. 여기서 f_1' 은 G_0 에서 G_1 으로 내린 에지의 (y, \bar{y}) 중에 \bar{y} 가 싱크인 것의 수이다. 이제 자유 에지가 k 개 존재하지 않고 $k=2$ 라고 하자. 두 소스를 잇는 해밀톤 경로를 찾고 그 경로를 (s_1, \dots, x, s_2) 라고 하고 \bar{s}_2 나 \bar{x} 가 싱크가 아니라고 하자. G_1 에서 \bar{s}_2, \bar{x} 를 가상의 소스로 두고 2-DPC를 찾거나 \bar{s}_2 나 \bar{x} 중 하나가 싱크이면 1-고장 1-DPC를 찾아 묶으면 증명이 끝난다.

3.2 정리 2의 증명

고장 해밀톤 성질은 [8]에서 이미 증명하였다. 정리 1로부터 모든 m -차원 제한된 HL-그래프는 (0-고장) 비쌍형 다대다 $m-2$ -DPC를 가지고 있음을 증명하면 된다.

보조정리 1 모든 4-차원 제한된 HL-그래프 $G(8,4) \oplus G(8,4)$ 는 (0-고장) 비쌍형 다대다 2-DPC를 가진다.

증명 G_0 와 G_1 을 $G(8,4)$ 와 동형이라고 하자. 일반성을 잃지 않고 G_0 에 있는 터미널의 수가 G_1 의 것보다 많다고 가정한다. G_0 에 4개의 터미널이 있으면 한 소스와 싱크를 잇는 해밀톤 경로 $(s_1, \dots, x, s_2, \dots, t_1, y, \dots, t_2)$ 를 찾고 G_1 에서 \bar{x} 와 \bar{y} 를 잇는 해밀톤 경로를 찾아 잇는다. G_0 가 터미널을 3개 가지면, 그들 중 둘을 소스라고 가정하고 이들을 잇는 해밀톤

경로 $(s_1, \dots, x, t_1, y, \dots, s_2)$ 를 찾고, \bar{x} 가 싱크가 아니라고 가정하고, G_1 에서 \bar{x} 와 t_2 를 잇는 해밀톤 경로를 찾으면 된다. G_0 가 2개의 터미널을 가지는데 소스하나 싱크하나라면 G_0 와 G_1 에서 독립적으로 소스와 싱크를 잇는 해밀톤 경로를 찾으면 된다. 이제 G_0 에 2개의 소스가 G_1 에 2개의 싱크가 있다고 가정한다. G_0 와 G_1 사이에 자유 에지가 5개 이상 존재한다면 [22]의 결과로부터 이들 중 둘 $(x, \bar{x}), (y, \bar{y})$ 을 잡아서 G_0 와 G_1 에서 독립적으로 2-DPC를 구한다. 그런 자유 에지가 4개가 존재하고 위와 같은 에지를 잡을 수 없는 경우를 고려한다. G_0 의 정점들을 v_0, v_1, \dots, v_7 이라고 하고, G_1 의 정점을 w_0, w_1, \dots, w_7 이라고 하자. [22]의 결과에 의하면 $\{v_0, v_3\}$ 과 $\{w_4, w_7\}$ 사이에, $\{v_4, v_7\}$ 과 $\{w_0, w_3\}$ 사이에, 그리고 $\{v_1, v_2, v_5, v_6\}$ 와 $\{w_1, w_2, w_5, w_6\}$ 사이에 에지가 존재한다. G_0 에서 v_0 를 가상의 고장으로 두고 v_3 과 \bar{w}_0 사이에 해밀톤 경로를 찾고, 마찬가지로 G_1 에서도 w_0 를 가상의 고장으로 두고 w_3 과 \bar{v}_0 사이에 해밀톤 경로를 찾으면 증명이 끝난다. □

m 에 대한 귀납법으로 정리 2를 증명한다. 보조정리 1에 의하여 $m \geq 5$ 를 가정한다. G_0 와 G_1 을 $m-1$ -차원 제한적 HL-그래프라고 하자. G_0 와 G_1 에 있는 소스-싱크 쌍의 수를 k_0, k_1 이라고 하고 G_0 와 G_1 사이의 소스-싱크 쌍의 수를 k_2 라고 하자. 물론 $k_0 + k_1 + k_2 = m - 2$ 이다. 일반성을 잃지 않고 $k_0 \geq k_1$ 이고, G_0 에 있는 소스의 수가 싱크의 수와 같거나 많다고 가정한다.

경우 1: $k_2 = 0$

$k_1 \geq 1$ 일 때는 G_0 와 G_1 에서 독립적으로 k_0 -DPC, k_1 -DPC를 구하면 된다. $k_1 = 0$ 일 때는 G_0 에서 소스 하나와 싱크 하나를 가상의 자유 정점으로 두고 $k-1$ -DPC를 구한 다음, 정리 1의 증명과 유사하게 가상의 자유 정점을 지나는 경로를 잘라서 G_1 으로 내린 다음, G_1 에서 해밀톤 경로를 찾아서 이으면 된다.

경우 2: $k_2 \geq 1$ 이고 $k_0 \geq 1$

먼저 G_0 와 G_1 사이에 $m-2$ 개의 자유 에지가 존재함을 주장한다. 이 주장의 증명은 정리 1에서의 주장의 증명과 유사하게 수월하게 증명할 수 있어서 생략한다. G_0 에 있는 소스 하나 s_i 를 가상의 자유 정점으로 두고 k_2-1 개 자유 에지의 끝점을 가상의 싱크로 두고 $k_0 + k_2 - 1$ -DPC를 구한다. 이때 G_1 에 있는 소스 s_j 에 대하여 (s_i, \bar{s}_j) 를 가상의 고장 에지라고 둔다. G_0 의 DPC에서 s_i 를 지나는 경로를 $(s_1, \dots, x, s_i, \dots, t_1)$ 라고 하자. G_1 에서는 \bar{x} 와 k_2-1 개 자유 에지의 끝점을 가상의 소스로 두고 f_1' -고장 $k_1 + k_2 - f_1'$ -DPC를 찾는다. f_1' 은 \bar{x} 가 싱크이면 1이고 그렇지 않으면 0이다. \bar{x} 가 싱크이고 $k_2 = 1$ 인 경우를 제외하고

는 증명이 끝났다. 남은 경우에는 G_0 의 DPC에 있는 한 경로가 지나는 에지 (a,b) 선택하는데 $a,b \neq x$ 이도록 한다. G_1 에서 \bar{a} 와 \bar{b} 사이의 해밀톤 경로를 찾아 이으면 된다.

경우 3: $k_2 = k$ ($k_0 = k_1 = 0$)

먼저 아래 주장 1을 고려한다. 증명은 다음 3.3절로 미룬다.

주장 1 G_1 에 주어진 $m-2$ 의 싱크에 대하여, 최소한 하나는 싱크와 다른 $m-3$ 개의 가상의 소스가 존재하여 가상의 소스 하나가 임의로 주어지더라도 G_1 은 가상의 소스와 싱크를 잇는 $m-2$ -DPC를 가진다. 여기서 가상의 소스와 싱크가 같은 정점일 때 길이 0인 경로라고 가정한다.

위의 주장 1을 만족하는 $m-3$ 개의 가상 소스를 x_1, x_2, \dots, x_{m-3} 이라고 하자. $X_0 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{m-3}\}$ 을 가상 싱크라고 두고 X_0 에 속하지 않는 소스 s_i 를 가상의 자유 정점이라고 둔다. X_0 에 속하는 모든 정점이 소스는 아닐 때에는 G_0 에서 소스와 가상 싱크 사이에 f_0' -고장 $m-3-f_0'$ -DPC를 찾는다. f_0' 은 X_0 에 속하는 소스의 수이다. 가상의 소스를 지나는 경로를 $(s_1, \dots, x, s_i, \dots, \bar{x}_j)$ 라고 둔다. X_0 에 속한 정점이 모두 소스이면 X_0 를 가상의 고장 정점이라고 두고 X_0 에 속하지 않는 소스 s_i 를 지나는 해밀톤 사이클을 찾고 그것을 (s_i, \dots, x) 라고 하자. 주장 1에 근거하여 G_1 에서 \bar{x} 를 포함하여 가상의 소스와 싱크를 잇는 $m-2$ -DPC를 찾고 그것을 G_0 의 DPC와 묶으면 증명이 끝난다.

3.3 주장 1의 증명

G_1^0 과 G_1^1 을 $m-2$ -차원 제한된 HL-그래프라고 하고, G_1 을 $G_1^0 \oplus G_1^1$ 이라고 둔다. 일반성을 잃지 않고 G_1^0 에 있는 싱크의 수가 G_1^1 의 것 이상이라고 가정하자. 먼저 $m \geq 6$ 인 경우를 고려하고, $m=5$ 인 경우는 나중에 고려한다.

경우 1: $m-2$ 개의 싱크가 모두 G_1^0 에 포함된다.

$m-4$ 개의 가상 소스는 싱크와 함께 두고 임의의 자유 정점 y 를 가상 소스라고 둔다. 새로운 가상 소스 하나를 s 라고 부르자. s 가 G_1^0 에 포함되고 싱크가 아닐 때는 먼저 G_1^0 에서 $m-5$ 개의 가상 소스이자 싱크를 가상 고장으로 두고 s 와 y 사이에 해밀톤 경로를 찾는다. 이 경로는 두 개의 싱크와 하나의 가상 소스 겸 싱크를 지난다. 이 경로를 4개의 부분 경로로 나누고 G_1^1 에서 2-DPC를 구하여 연결하면 된다. s 가 G_1^0 에 포함되고 싱크일 때는 위와 같이 $m-5$ 개의 가상 소스겸 싱크를 가상 고장으로 두고 남은 두 가상 소스 겸 싱크

를 있는 해밀톤 경로를 찾는다. 이 경로가 소스 하나와 싱크 하나를 지나는데 이 경로를 3개의 부분 경로로 나누고 G_1^1 에서 2-DPC를 구하여 잇는다. 이제 s 가 G_1^1 에 속할 때는 G_1^0 에서 $m-4$ 개의 가상 소스 겸 싱크를 가상 고장으로 두고 해밀톤 사이클을 찾는다. 이 사이클은 하나의 소스와 싱크 둘을 지난다. 이 사이클 상에서 하나의 경로를 찾고 나머지를 두 개의 부분 경로로 나누어 G_1^1 으로 내려 G_1^1 에서 2-DPC를 찾아 이을 수 있다. 경우에 따라 G_1^1 에서 2-DPC를 찾지 않고 1-고장 1-DPC를 찾을 수도 있다.

경우 2: G_1^0 에 $m-3$ 개의 싱크와 G_1^1 에 1개의 싱크가 포함된다.

G_1^1 의 자유 정점 y 중에서 \bar{y} 가 싱크인 것을 가상의 소스로 두고, \bar{y} 를 포함하여 G_1^0 에 있는 $m-4$ 개의 싱크를 가상의 소스로 둔다. 새로운 가상의 소스 s 가 G_1^0 에 있을 때에는 G_1^0 에서 $m-4$ 개의 가상 소스 겸 싱크를 가상의 고장으로 두고 해밀톤 사이클을 찾는다. 이 해밀톤 사이클은 소스 하나와 싱크 하나를 지난다. 이 사이클을 소스와 싱크를 잇는 경로와 나머지 경로 나누고 나머지 경로의 끝점을 G_1^1 으로 내린 다음 G_1^1 에서 2-DPC 혹은 1-고장 1-DPC를 찾아서 잇는다. 이 때 해밀톤 사이클 상에 있는 소스와 싱크가 같은 정점일 때에는 소스-싱크를 잇는 길이 0인 경로가 생기고 그렇지 않을 때에는 길이가 1 이상이 된다. s 가 G_1^1 있을 때에는 위와 마찬가지로 해밀톤 사이클을 찾고 해밀톤 사이클을 한 끝점이 싱크인 경로로 바꾸어 다른 끝점을 G_1^1 으로 내린 다음 G_1^1 에서 2-DPC 혹은 1-고장 1-DPC를 찾아 연결하면 된다.

경우 3: G_1^0 에 $m-4$ 개 이하의 싱크와 G_1^1 에 둘 이상의 싱크가 포함된다.

G_1^0 에 하나를 제외한 모든 싱크에, G_1^1 에 둘을 제외한 모든 싱크에 가상의 소스를 둔다. 그리고 G_1^0 와 G_1^1 을 잇는 자유 에지 (x, \bar{x}) 를 찾는데 x 가 G_1^0 의 모든 싱크와 인접하지 않은 것으로 한다. 그런 자유 에지가 존재하는 것은 자명하다. 새로운 소스 s 가 G_1^0 에 있을 때는 G_1^0 에서 가상의 소스 겸 싱크를 모두 가상 고장으로 두고 x 와 s 를 잇는 해밀톤 경로를 찾는다. 그 경로를 $(x, \dots, z, t_i, \dots, s)$ 라고 두고 G_1^1 에서 가상의 소스 겸 싱크를 가상의 고장으로 두고 2-DPC 혹은 1-고장 1-DPC를 찾아 연결하면 된다. s 가 G_1^1 에 있을 때는 G_1^0 에서 가상의 소스 겸 싱크를 가상의 고장으로 두고 남은 한 싱크와 x 를 잇는 해밀톤 경로를 찾고, G_1^1 에서 가상의 소스 겸 싱크를 가상의 고장으로 두고 2-DPC 혹은 1-고장 1-DPC를 찾아 연결하면 $m \geq 6$ 인 경우의 증명이 완성된다.

이제 $m=5$ 라고 가정한다. G_1^0 와 G_1^1 이 $G(8,4)$ 와 동형임에 유의한다. 그리고 [22]에서 밝힌 $G(8,4)$ 의 2-DPC 성질과 1-고장 1-DPC 성질을 이용하여 증명하기로 한다.

경우 4: $m = 5$ 이고 G_1^0 에 2개의 싱크가 G_1^1 에 싱크가 하나 포함된다.

G_1^0 에 있는 두 싱크의 위치는 대칭성을 고려하면 4 경우가 있는데 각각 $\{v_0, v_1\}$, $\{v_0, v_2\}$, $\{v_0, v_3\}$, $\{v_0, v_4\}$ 일 때 자유 정점 v_4, v_4, v_4, v_1 을 가상의 소스라고 둔다. G_1^1 에서는 G_1^1 의 싱크와 대각선 위치에 있는 자유 정점을 가상의 소스로 둔다. 즉, G_1^1 에서 w_j 가 싱크라면 $w_{(j+4) \bmod 8}$ 을 가상의 소스로 둔다. 그러면 새로운 가상의 소스 s 가 G_1^0 의 어떤 정점에 위치하더라도 s 가 싱크가 아니면 2-DPC가 존재하고, s 가 싱크이면 1-고장 1-DPC가 존재한다. 이 경우 G_1^1 에서 싱크-소스를 잇는 해밀톤 경로를 구하면 3-DPC가 완성된다. 이 때 세 개의 서로 다른 자유 정점 y 가 G_1^0 에 존재하여 y 를 가상의 소스로 두면, 가상의 소스와 두 싱크를 잇는 2-DPC가 존재함을 보일 수 있다. 각 경우 2-DPC를 보이는 것은 수월하므로 생략한다. 서로 다른 세 y 가 존재한다는 말은 s 가 G_1^1 에 있을 때는 G_1^0 에서 2-DPC, G_1^1 에서 2-DPC 혹은 1-고장 1-DPC를 구함으로써 3-DPC를 완성할 수 있음을 의미한다.

경우 5: $m = 5$ 이고 G_1^0 에 3개의 싱크가 포함된다.

G_1^0 의 세 싱크의 위치가 각각 $\{v_0, v_1, v_2\}$, $\{v_0, v_1, v_3\}$, $\{v_0, v_1, v_5\}$, $\{v_0, v_2, v_6\}$, $\{v_0, v_3, v_5\}$ 일 때 $\{v_2, v_4\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_4, v_6\}$, $\{v_4, v_5\}$ 를 가상의 소스로 둔다. 가상의 소스 겸 싱크를 가상의 자유 정점으로 두면 새로운 소스 s 가 G_1^0 의 싱크가 아니면 2-DPC가, 싱크이면 1-고장 1-DPC가 존재함을 어렵지 않게 확인할 수 있다. 가상의 자유 정점(가상의 소스 겸 싱크)을 지나는 경로에서 이 정점 좌우의 두 정점을 x 와 y 라고 두고 G_1^1 에서 \bar{x} 와 \bar{y} 를 잇는 해밀톤 경로를 이용하여 연결하면 원하는 3-DPC를 구하게 된다. s 가 G_1^1 에 속하는 경우에는 G_1^0 에서 가상의 소스 겸 싱크를 가상의 고장으로 두었을 때 서로 다른 2개의 자유 정점 y 가 존재하여 가상의 소스와 y 에서 출발하여 두 싱크를 잇는 1-고장 2-DPC가 존재하므로, G_1^1 에서 s 와 \bar{y} 를 잇는 해밀톤 경로를 구하여 연결하면 된다.

4 결론

이 논문에서는 제한된 HL-그래프에서 비쌍형 다대다 서로소인 경로 커버를 고려하여 모든 m -차원 제한된 HL-그래프($m \geq 3$)는 $f + k \leq m - 2$ 를 만족하는 임의의 $f \geq 0$, $k \geq 1$ 에 대하여 f -고장 비쌍형 다대다 k -DPC가 존재함을 보였다. 이 논문에서 제시한 증명을 따라 m -차원 제한된 HL-그래프에서 f -고장 비쌍형 k -DPC를 찾는 알고리즘을 설계할 수 있다.

참고문헌

- [1] J.-H. Park, "One-to-one disjoint path covers in recursive circulants," *Journal of KISS* **30(12)**, pp. 691-698, 2003.
- [2] C.-H. Tsai, J.J.M. Tan, and L.-H. Hsu, "The super-connected property of recursive circulant graphs," *Inform. Proc. Lett.* **91(6)**, pp. 293-298, 2004.
- [3] C.-H. Chang, C.-K. Lin, H.-M. Huang, and L.-H. Hsu, "The super laceability of the hypercubes," *Inform. Proc. Lett.* **92(1)**, pp. 15-21, 2004.
- [4] J.-H. Park, "One-to-many disjoint path covers in a graph with faulty elements," in *Proc. of the International Computing and Combinatorics Conference COCOON 2004*, pp. 392-401, Aug. 2004.
- [5] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Many-to-many disjoint path covers in a graph with faulty elements," in *Proc. of the International Symposium on Algorithms and Computation ISAAC 2004*, pp. 742-753, Dec. 2004.
- [6] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Many-to-many disjoint path covers in hypercube-like interconnection networks with faulty elements," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems* **17(3)**, pp. 227-240, Mar. 2006.
- [7] 박정흠, "이중 루프 네트워크의 다대다 서로소인 경로 커버," *한국정보과학회논문지* **32(8)**, pp. 426-431, 2005년 8월.
- [8] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Fault-hamiltonicity of hypercube-like interconnection networks," in *Proc. of the IEEE International Parallel & Distributed Processing Symposium IPDPS 2005*, Apr. 2005.
- [9] P.A.J. Hilbers, M.R.J. Koopman, J.L.A. van de Snepscheut, "The Twisted Cube," in J. Bakker, A. Nijman, P. Treleaven, eds., *PARLE: Parallel Architectures and Languages Europe, Vol. I: Parallel Architectures*, Springer, pp. 152-159, 1987.
- [10] K. Efe, "The crossed cube architecture for parallel computation," *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems* **3(5)**, pp. 513-524, 1992.
- [11] K. Efe, "A variation on the hypercube with lower diameter," *IEEE Trans. on Computers* **40(11)**, pp. 1312-1316, 1991.
- [12] P. Cull and S. Larson, "The Möbius cubes," in *Proc. of the 6th IEEE Distributed Memory Computing Conf.*, pp. 699-702, 1991.
- [13] N.K. Singhvi and K. Ghose, "The Mcube: a symmetrical cube based network with twisted links," in *Proc. of the 9th IEEE Int. Parallel Processing Symposium IPPS 1995*, pp. 11-16, 1995.
- [14] F.B. Chedid, "On the generalized twisted cube," *Inform. Proc. Lett.* **55**, pp. 49-52, 1995.
- [15] J.-H. Park and K.Y. Chwa, "Recursive circulants and their embeddings among hypercubes," *Theoretical Computer Science* **244**, pp. 35-62, 2000.
- [16] A.-H. Esfahanian, L.M. Ni, and B.E. Sagan, "The twisted n -cube with application to multiprocessing," *IEEE Trnas. Computers* **40(1)**, pp. 88-93, 1991.

- [17] T.-Y. Sung, C.-Y. Lin, Y.-C. Chuang, and L.-H. Hsu, "Fault tolerant token ring embedding in double loop networks," *Inform. Proc. Lett.* **66**, pp. 201–207, 1998.
- [18] A. Sengupta, "On ring embedding in hypercubes with faulty nodes and links," *Inform. Proc. Lett.* **68**, pp. 207–214, 1998.
- [19] Y.-C. Tseng, S.-H. Chang, and J.-P. Sheu, "Fault-tolerant ring embedding in a star graph with both link and node failures," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems* **8(12)**, pp. 1185–1195, Dec. 1997.
- [20] A.S. Vaidya, P.S.N. Rao, S.R. Shankar, "A class of hypercube-like networks," in *Proc. of the 5th IEEE Symposium on Parallel and Distributed Processing SPDP 1993*, pp. 800–803, Dec. 1993.
- [21] C.-D. Park and K.Y. Chwa, "Hamiltonian properties on the class of hypercube-like networks," *Inform. Proc. Lett.* **91**, pp. 11–17, 2004.
- [22] H.-S. Lim, H.-C. Kim, and J.-H. Park, "Hypohamiltonian-connectedness and pancyclicity of hypercube-like interconnection networks", in *Proc. Korea-Japan Joint Workshop on Algorithms and Computation WAAC 2005*, Seoul, Aug. 2005.