

고장난 재귀원형군의 사이클 임베딩*

박 정흠

가톨릭대학교 컴퓨터정보공학부
420-743 경기도 부천시 원미구 역곡 2동 산 43-1
j.h.park@catholic.ac.kr
전화 (032) 340-3366, 팩스 (032) 340-3777

Cycle Embedding of Faulty Recursive Circulants

Jung-Heum Park

School of Computer Science and Information Engineering
The Catholic University of Korea
Yokkok 2-dong 43-1, Wonmi-gu, Puchon City, Kyonggi-do 420-743
j.h.park@catholic.ac.kr
TEL (032) 340-3366, FAX (032) 340-3777

* 본 연구는 2003년도 가톨릭대학교 교비연구비의 지원으로 이루어졌음.

고장난 재귀원형군의 사이클 임베딩

Cycle Embedding of Faulty Recursive Circulants

요약

이 논문에서는 재귀원형군 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 은 고장인 요소의 수가 $m-2$ 개 이하일 때, 임의의 l , $4 \leq l \leq 2^m - f_v$ 에 대하여 길이 l 인 고장 없는 사이클을 가짐을 보인다. 여기서, f_v 는 고장 정점의 수이다. 이를 위하여, $|F| \leq k$ 인 임의의 고장 요소 집합 F 에 대해서 $G-F$ 가 임의의 두 정점을 잇는 길이가 해밀톤 경로보다 하나 작은 경로를 가질 때, G 를 k -고장 하이포해밀톤 연결된 그래프라고 정의하고, $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 은 $m-3$ -고장 하이포해밀톤 연결된 그래프임을 보인다.

키워드: 사이클 임베딩, 해밀톤 경로, 고장 감내, 재귀원형군, 상호 연결망, circulant 그래프

Abstract

In this paper, we show that $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ with at most $m-2$ faulty elements has a fault-free cycle of length l for every $4 \leq l \leq 2^m - f_v$, where f_v is the number of faulty vertices. To achieve our purpose, we define a graph G to be k -fault hypohamiltonian-connected if for any set F of faulty elements, $G-F$ has a fault-free path joining every pair of fault-free vertices whose length is shorter than a hamiltonian path by one, and then show that $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ is $m-3$ -fault hypohamiltonian-connected.

Key words: Cycle embedding, hamiltonian paths, fault tolerance, recursive circulants, interconnection networks, circulant graphs

1 서론

고성능 컴퓨터를 설계하기 위해서 다중 컴퓨터 네트워크를 구성하는 것은 비용이 적게 드는 방식이다[1]. 다중 컴퓨터 네트워크는 개별 기억장치를 가지는 노드와 노드를 서로 이어주는 통신 링크로 이루어져 있다. 다중 컴퓨터 네트워크에서 연결망 구조는 전체 시스템의 성능에 크게 영향을 미치는 것으로 알려져 있다. 연결망 구조는 그래프로 자연스럽게 모델할 수 있는데, 이 때 노드는 그래프의 정점에 대응되고 통신 링크는 에지에 대응된다.

재귀원형군은 [2]에서 제안된 다중컴퓨터의 연결망 구조이다. 재귀원형군 $G(N, d)$ 는 N 개의 노드 $\{v_0, v_1, \dots, v_{N-1}\}$ 을 가지고 $s + d^i \equiv t \pmod{N}$ 을 만족하는 정수 i , $0 \leq i \leq \lceil \log_d N \rceil - 1$ 이 존재하면 두 노드 v_s, v_t 를 잇는 에지가 있다. 이 에지 (v_s, v_t) 의 크기는 d^i 이라고 한다. $G(N, d)$ 는 N 개의 정점을 가지고 N 보다 작은 모든 d 의 거듭 제곱을 점프로 가지는 circulant 그래프라고 정의할 수도 있다. 이 논문에서는 N 이 2^m , d 가 4로 제한된 재귀원형군 $G(2^m, 4)$ 를 고려한다. $G(2^m, 4)$ 는 분지수와 연결도가 모두 m 이며 지름이 $\lceil (3m-1)/4 \rceil$ 로써 하이퍼큐브 Q_m 의 지름 m 보다 짧다.

재귀원형군의 사이클 특성으로 다음과 같은 것들이 알려져 있다. 재귀원형군은 에지가 서로소인 해밀톤 사이클로 분할하는 해밀톤 분할(hamiltonian decomposition)이 가능함이 알려져 있다[3-5]. 길이가 3부터 N 까지 임의의 길이의 사이클을 가진 pancyclic 그래프가 되는 재귀원형군의 부류가 발표되어 있다[6]. 또한 재귀원형군은 분지수가 3 이상인 경우 임의의 정점쌍을 잇는 해밀톤 경로가 존재하는 해밀톤 연결된(hamiltonian-connected) 그래프이다. 이것은 임의의 에지를 지나는 해밀톤 사이클(hamiltonian cycle)이 존재한다는 것을 의미한다. 이러한 성질은 재귀원형군을 포함하는 abelian 군에 대한 Cayley 그래프 부류에서 이분(bipartite) 그래프가 아니면 성립하는 것으로 알려져 있다[7]. 그리고 [8]에서 어떤 정수 l 이 주어져 있을 때, 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 가 길이 l 인 사이클을 가지는가 하는 사이클 존재 문제와, 길이 l 인 사이클이 존재할 때 가능한 최대 개수 $\lfloor 2^m/l \rfloor$ 의 정점이 서로소이고 길이가 l 인 사이클을 가지는가 하는 사이클 패킹 문제가 고려되었다.

G 를 정점의 수가 N 인 그래프라고 하고, G 에 있는 고장 정점과 고장 에지의 집합을 각각 F_v, F_e 라고 표기하자. $F = F_v \cup F_e$, $f_v = |F_v|$, $f_e = |F_e|$, $f = f_v + f_e$ 라고 두자. $|F| \leq k$ 인 임의의 고장 요소 집합 F 에 대해서 $G - F$ 가 임의의 두 정점을 잇는 (길이 $N - f_v - 1$ 인) 해밀톤 경로를 가지고 있을 때, G 를 k -고장 해밀톤 연결된(k -fault hamiltonian-connected) 그래프라고 한다. 그리고 $|F| \leq k$ 일 때, $G - F$ 가 해밀톤 사이클을 가지고 있으면 G 를 k -고장 해밀톤(k -fault hamiltonian) 그래프라고 한다. $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 은 $m-3$ -고장 해밀톤 연결된 그래프이고, $m-2$ -고장 해밀톤 그래프임이 알려져 있다[9].

우리는 $|F| \leq k$ 인 임의의 고장 요소 집합에 대해서 $G - F$ 가 임의의 두 정점을 잇는 길이 $N - f_v - 2$ 인 경로를 가지고 있을 때 G 를 k -고장 하이포해밀톤 연결된(k -fault hypohamiltonian-connected) 그래프라고 정의하며, 그 경로들을 하이포해밀톤 경로(hypohamiltonian path)라고 말한다. k -고장 해밀톤 그래프는 $|F| \leq k$ 일 때 $G - F$ 의 모든 정점을 지나는(길이 $N - f_v$ 인) 해밀톤 사이클이 있다는 것을 의미하는데, 이것을 확장하여 임의의 l , $4 \leq l \leq N - f_v$ 에 대하여 $G - F$ 가 길이 l 인 사이클을 가지는 그래프 G 를 k -고장 almost pancyclic(k -fault almost pancyclic) 그래프라고 한다. 우리는 이 논문에서 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 은 $m-2$ -고장 almost pancyclic 그래프임을 보인다. 이를 증명하기 위해서 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 이 $m-3$ -고장 하이포해밀톤 연결된 그래프임을 보이고, 이를 이용한다.

이 논문에서 고려한 문제는 재귀원형군 다중컴퓨터의 병렬 작업 할당에 응용할 수 있다. 노드나 통신 링크에 고장이 발생하였을 때 노드수가 l 인 링 연결망 구조를 요구하는 병렬 작업을 $G(2^m, 4)$ 에 할당할 수 있는가하는 문제가 된다. 임베딩의 관점에서 다시 말하면, 노드수가 l 인 링 구조를 $G(2^m, 4)$ 에 신장율(dilation)과 밀집율(congestion)이 모두 1인 임베딩(embedding)이 존재하느냐하는 문제이다.

앞에서 언급한 사이클 특성을 제외하고 재귀원형군에 대한 연구를 살펴보면 다음과 같은 것이 있다. 임베딩(embedding)에 대해서는 트리 임베딩과[10-11], 하이퍼큐브 임베딩[2] 등이 연구되었다. 그리고 연결도를 일반화한 super-connectivity, super-edge-connectivity에 대한 연구가 발표되어 있고[12], 일반적으로 주어진 그래프가 재귀원형군인지 아닌지를 판별하는 알고리즘에 대한 연구[13-14] 등이 있다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서 몇몇 용어 정의와 관련 연구를 살펴본 다음, 3절에서 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 과 그의 K_2 와 그래프 곱의 고장 하이포해밀톤 성질을 보인다. 그리고 4절에서 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 과 그의 K_2 와 그래프 곱의 고장 almost pancyclic 성질을 증명한다. 마지막으로 4절에서 결론을 기술한다.

2 정의 및 관련 연구

이 논문에서 따로 정의하지 않은 그래프 이론적인 용어는 [15]을 따른다. 경로는 정점의 열로 표현한다. P 와 Q 를 각각 그래프 G 에 있는 두 서로소인 경로 (a_1, a_2, \dots, a_k) 와 (b_1, b_2, \dots, b_l) 이라고 하고, (a_j, b_1) 과 (a_{i+1}, b_l) 이 G 의 에지라고 하자. 에지 (a_j, a_{i+1}) 을 (a_j, b_1) 과 (a_{i+1}, b_l) 로 교체하면, P 와 Q 는 합쳐져서 하나의 경로 $(a_1, a_2, \dots, a_j, b_1, b_2, \dots, b_l, a_{i+1}, \dots, a_k)$ 를 이루게 된다. 이와 같은 교체를 P 와 Q 의 (a_j, b_1) 과 (a_{i+1}, b_l) 에 대한 병합(merge)이라고 부른다. P 가 닫힌 경로 즉 사이클이면, 병합 연산은 하나의 사이클을 만든다.

두 그래프 G 와 H 의 곱 $G \times H$ 는 다음과 같이 정의된다. 정점의 집합은 $\{(v, w) | v \in V(G), w \in V(H)\}$ 이고, 두 정점 (v, w) 와 (v', w') 사이에 에지는 $v = v'$ 이고 $(w, w') \in E(H)$ 이거나 혹은 $w = w'$ 이고 $(v, v') \in E(G)$ 인 경우에만 존재한다. 여기서 $V(G)$ 와 $E(G)$ 는 각각 그래프 G 의 정점과 에지 집합을 말한다.

H_0, H_1 을 정점의 수가 같은 그래프라고 하고, H_0 의 정점 집합을 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, H_1 의 정점 집합을 $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 이라고 하자. $\{1, 2, \dots, n\}$ 의 임의의 순열 (i_1, i_2, \dots, i_n) 에 대해서 모든 $k, 1 \leq k \leq n$ 에 대해서 (v_k, w_{i_k}) 쌍을 잇는 에지를 추가하면 H_0, H_1 으로부터 정점의 수가 $2n$ 개인 그래프를 정의할 수 있다. 다른 순열은 다른 그래프를 정의할 수 있다. 이러한 방식으로 얻을 수 있는 그래프의 집합을 $H_0 \oplus H_1$ 으로 나타내기로 한다.

그래프 H 와 K_2 의 그래프 곱 $H \times K_2$, 그리고 $H_0 \oplus H_1$ 에 속한 그래프의 고장 해밀톤 성질에 대한 연구가 있다[16].

보조정리 1 [16] 분지수가 $\delta, \delta \geq 3$ 인 그래프 H 가 $\delta-3$ -고장 해밀톤 연결된 그래프이고 $\delta-2$ -고장 해밀톤 그래프이면, $H \times K_2$ 는 $\delta-2$ -고장 해밀톤 연결된 그래프이고 $\delta-1$ -고장 해밀톤 그래프이다.

보조정리 2 [16] $k \geq 2$ 일 때, H_0 과 H_1 각각이 k -고장 해밀톤 연결된 그래프이고 $k+1$ -고장 해밀톤 그래프이면, $H_0 \oplus H_1$ 에 속하는 임의의 그래프는 $k+1$ -고장 해밀톤 연결된 그래프이고 $k+2$ -고장 해밀톤 그래프이다.

채귀원형군의 기본적인 성질은 [2]에 소개되어 있다. 채귀원형군 $G(N, d)$ 는 $N = cd^m, 1 \leq c < d$ 일 때 채귀적 구조를 갖는다. $G(cd^m, d), m \geq 1$ 는 다음과 같이 d 개의 $G(cd^{m-1}, d)$ 를 이용하여 설계할 수 있다. $G_i(V_i, E_i), 0 \leq i < d$ 를 $G(cd^{m-1}, d)$ 와 동형인 그래프라고 하고 $V_i = \{v_0^i, v_1^i, \dots, v_{cd^{m-1}-1}^i\}$ 라 두자. 그리고 G_i 는 v_j^i 을 v_j 에 대응시키는 사상에 의해서 $G(cd^{m-1}, d)$ 와 동형이라고 하자. v_j^i 를 v_{jd+i} 로 다시 레이블한 다음, 정점 집합을 $\bigcup_{0 \leq i < d} V_i$ 이라고 두고, 에지 집합을 $\bigcup_{0 \leq i < d} E_i \cup X$ 이라고 두면 $G(cd^m, d)$ 가 정의된다. 여기서 X 는 크기가 1인 에지의 집합으로 $\{(v_j, v_{j'}) | j+1 \equiv j' \pmod{cd^m}\}$ 이다. $G(2^m, 4)$ 는 $G(cd^m, d)$ 부류에 속하므로 당연히 채귀적 구조를 갖는다. $G(2^m, 4)$ 의 채귀적 구조에서는 $G(2^{m-2}, 4)$ 와 동형인 G_0, G_1, G_2, G_3 에 크기가 1인 에지가 2^m 개 추가되어 있다.

이분 그래프가 아닌 재귀원형군 $G(cd^m, d)$ 의 고장 해밀톤 성질이 [9]에 발표되어 있다. $G(cd^m, d)$ 는 c 가 짝수이고 동시에 d 가 홀수일 때만 이분그래프이다.

보조정리 3 [9] 이분 그래프가 아닌 $G(cd^m, d)$ 는 $\delta-3$ -고장 해밀톤 연결된 그래프이고 $\delta-2$ -고장 해밀톤 그래프이다. 여기서 δ 는 $G(cd^m, d)$ 의 분지수이다.

따름정리 1 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 은 $m-3$ -고장 해밀톤 연결된 그래프이며 $m-2$ -고장 해밀톤 그래프이다.

3 하이포해밀톤 연결된 그래프

이 절에서는 재귀원형군 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 과 $G(2^{m-1}, 4) \times K_2$, $m \geq 4$ 가 $m-3$ -고장 하이포해밀톤 연결된 그래프임을 보인다. 먼저 다음 정리 1에서 그래프 H 와 K_2 의 곱 $H \times K_2$ 의 하이포해밀톤 연결성을 고려한다.

정리 1 H 를 δ -정규 그래프이고 정점수가 2^δ 이라고 하자($\delta \geq 3$). 만약 H 가 $\delta-3$ -고장 해밀톤 연결되어 있고 $\delta-3$ -고장 하이포해밀톤 연결되어 있으며 $\delta-2$ -고장 해밀톤 그래프라고 하면, $H \times K_2$ 는 $\delta-2$ -고장 하이포해밀톤 연결된 그래프이다.

증명 임의의 고장이 아닌 두 정점 v, w 사이에 하이포해밀톤 경로 P 를 설계하기로 한다. $H \times K_2$ 에는 있는 H 의 복사본을 각각 H_0, H_1 이라고 하고, H_0, H_1 이 각각 포함하고 있는 고장 요소의 수를 f_0, f_1 이라고 둔다. $H \times K_2$ 에 있는 고장 요소의 수를 f 라고 한다. 그러면 $f_0 + f_1 \leq f$ 이다.

경우 1 $f_0, f_1 \leq \delta-3$. H_0, H_1 은 해밀톤 연결되어 있고 하이포해밀톤 연결되어 있음에 유의한다. v, w 가 모두 H_0 에 속하는 경우는 H_0 에서 v, w 를 잇는 해밀톤 경로 P_0 를 찾고, 다음 조건을 만족하도록 경로 상에 있는 한 예지 (x, y) 를 선택한다: 각각 x, y 와 인접한 H_1 의 정점 x', y' 이 고장이 아니며, 예지 $(x, x'), (y, y')$ 도 고장이 아니다. H_1 에서 x', y' 을 잇는 하이포해밀톤 경로를 P_1 이라고 하면, P 는 P_0 와 P_1 의 $(x, x'), (y, y')$ 에 대한 병합으로 얻을 수 있다. 이제 v 는 H_0 에 w 는 H_1 에 있는 경우를 고려한다. 서로 인접하고 두 정점과 그들을 잇는 예지가 모두 고장이 아니도록 H_0 에 한 정점 x 를, H_1 에서 한 정점 y 를 잡는다. H_0 에서 v 와 x 를 잇는 해밀톤 경로 P_0 를 찾고, H_1 에서 y 와 w 를 잇는 하이포해밀톤 경로 P_1 를 찾으면, $P = (P_0, P_1)$ 이다.

경우 2 $f_0 = f = \delta-2$. H_1 에는 고장이 없고 H_0, H_1 사이에 있는 예지도 모두 고장

이 아니다. 먼저 v, w 가 모두 H_0 에 속하는 경우는 고장 요소 하나 z 를 고장이 아닌 것으로 간주하여 v, w 사이에 해밀톤 경로 P_0 를 찾는다. P_0 가 z 를 지나는 경우는 P_0 상에서 z 와 인접한 두 정점을 x, y 라고 하면, P_0 는 $v-x$ 경로 P_0' 과 $y-w$ 경로 P_0'' 로 나눌 수 있고, 마찬가지로 P_0 가 z 를 지나지 않는 경우도 P_0 상에 있는 임의의 한 에지 (x, y) 를 잡아서 두 경로로 나눌 수 있다. 각각 x, y 에 인접한 H_1 의 정점을 x', y' 이라고 하고, H_1 에서 x', y' 을 잇는 하이포해밀톤 경로 P_1 을 찾는다. 그러면, $P = (P_0', P_1, P_0'')$ 이다. 이제 v 는 H_0 에, w 는 H_1 에 속하는 경우를 고려한다. H_0 에서 해밀톤 사이클 C 을 찾는다. C 상에서 v 와 인접한 정점 하나 x 를 찾는데, x 와 인접한 H_1 의 정점 x' 이 w 가 아니도록 한다. H_1 에서 x' 과 w 를 잇는 하이포해밀톤 경로 P_1 을 찾으면, $P = (C - (v, x), P_1)$ 이다. 마지막으로 v, w 가 모두 H_1 에 속하는 경우를 고려한다. δ 크기에 따라 세 경우로 나누어 생각한다. 먼저 $\delta = 3$ 인 경우를 고려한다. 이 때 $f = 1$ 이다. H_0 에서 해밀톤 사이클 C 를 찾고, H_1 에서 v, w 사이의 하이포해밀톤 경로 P_1 을 찾는다. C 상에 어떤 에지 (x, y) 가 존재하여, x, y 와 인접한 H_1 의 정점을 각각 x', y' 이라고 할 때, P_1 이 (x', y') 을 지남을 보인다. $N = 2^6$ 라고 할 때, C 는 $N-1$ 개 이상의 에지를 지나고 P_1 은 $N-2$ 개의 에지를 지난다. 그런 에지 (x', y') 이 존재하지 않기 위해서는 $(N-1) + (N-2)$ 가 H_0 의 에지 수 $3N/2$ 보다 같거나 작아야 하지만, 그것은 $N = 8$ 이므로 불가능하다. 이 경우 P 는 P_1 과 $C - (x, y)$ 의 $(x', x), (y', y)$ 에 대한 병합으로 구할 수 있다. 이제 $\delta = 4$ 인 경우를 고려한다. 이 경우 $f = 2$ 이다. 각각 v, w 에 인접한 H_0 의 정점을 v', w' 이라고 하자. H_0 에서 해밀톤 사이클 C 를 찾는다. 먼저 v' 이나 w' 이 고장 정점이 아닌 경우를 고려한다. 일반성을 잃지 않고 v' 은 고장이 아니라고 가정한다. C 상에서 v' 과 인접한 한 정점 x 를 선택하는데, 그와 인접한 H_1 의 정점 x' 이 w 가 아니도록 한다. 그러면, $P = (v, C - (v, x), P_1)$ 이다. 여기서 P_1 은 v 를 고장 정점이라고 간주하고 찾은 H_1 의 x', w 사이의 하이포해밀톤 경로이다. v', w' 이 모두 고장인 경우를 고려한다. H_1 에서 v, w 사이의 하이포해밀톤 경로 P_1 을 찾는다. H_0 에서 고장 정점 v' 과 인접한 한 정점 x 를 선택하는데, (i) x 가 w' 과 다르고 (ii) x 와 인접한 H_1 의 정점 x' 을 P_1 이 지나며 (iii) x' 이 P_1 상에서 v 와 인접하지 않도록 한다. C 는 x 와 인접한 에지들 중에서 (x, v') 을 제외한 세 에지 중 둘을 지나고, P_1 은 x' 과 인접한 에지들 중에서 (x', v) 를 제외한 세 에지 중 둘을 지난다. 따라서 x 와 인접한 H_0 의 정점 y 가 존재하여 C 는 (x, y) 를 지나고 P_1 은 (x', y') 을 지난다. 여기서 y' 은 y 와 인접한 H_1 의 정점이다. P_1 과 C 의 $(x', x), (y', y)$ 에 대한 병합으로 하이포해밀톤 경로 P 를 얻을 수 있다. 마지막으로 $\delta \geq 5$ 인 경우를 고려한다. H_1 이 2-고장 하이포해밀톤 연결되어 있음에 유의한다. H_0 에서 해밀톤 사이클 C 를 찾는다. v 에 인접한 H_1 의 정점 하나 x 를 선택하는데 다음 조건을 만족하도록 한다: (i) x 와 인접한 H_0 의 정점 x' 이 고장이 아니고, (ii) C 상에서 x' 과

인접한 두 정점 중 최소한 하나 y' 은 그와 인접한 H_1 의 정점 y 가 v, w 와 다르다. 위의 조건을 만족하는 그런 x, y 를 항상 선택할 수 있는 것은 고장 요소의 수가 $\delta-2$ 이기 때문이다. v 와 x 를 고장이라고 간주하고 H_1 에서 y 와 w 를 잇는 하이포해밀톤 경로 P_1 을 찾으면, $P = (v, x, C-(x', y), P_1)$ 이다. \square

위 정리 1은 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 이 $m-3$ -고장 하이포해밀톤 연결된 그래프임을 증명할 수 있으면, $G(2^m, 4) \times K_2$, $m \geq 3$ 이 $m-2$ -고장 하이포해밀톤 연결된 그래프가 됨을 의미한다. 또한 이 정리는 앞으로 $G(2^m, 4)$ 의 $m-3$ -고장 하이포해밀톤 연결성을 고찰하는데 이용된다. 이제 임의의 고장이 아닌 두 정점 v, w 사이에 하이포해밀톤 경로 P 를 설계함으로써, $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 이 $m-3$ -고장 하이포해밀톤 연결된 그래프임을 보이기로 한다.

보조정리 4 $G(2^3, 4)$ 는 0-고장 하이포해밀톤 연결된 그래프이다.

증명 일반성을 잃지 않고 $v = v_0$ 라고 가정한다. $w = v_4$ 인 경우 $P = (v, v_7, v_6, v_2, v_1, v_5, w)$, $w = v_1$ 인 경우 $P = (v, v_4, v_3, v_2, v_6, v_5, w)$, $w = v_5$ 인 경우 $P = (v, v_1, v_2, v_3, v_7, v_6, w)$, $w = v_2$ 인 경우 $P = (v, v_4, v_5, v_6, v_7, v_3, w)$ 이다. 나머지 경우는 이와 대칭이다. \square

$G(2^4, 4)$ 의 하이포해밀톤 연결성을 고찰하기 위해서 필요한 몇 가지 정의를 하고, 아래 보조정리 5를 인용한다. G 를 N 개의 정점을 가지고 $|B| = |\mathcal{W}|$ 인 이분 그래프라 하자. 여기서 B 와 \mathcal{W} 는 각각 G 의 검정 정점과 흰색 정점 집합이다. $f_v^w = |F_v \cap \mathcal{W}|$, $f_v^b = |F_v \cap B|$ 라고 두자. $f_v^b = f_v^w$ 일 때, 서로 다른 색을 가진 두 정점을 잇는 길이가 $N-2f_v^b-1$ 인 고장 없는 경로를 L^{opt} -경로라고 한다. 같은 색을 가진 두 정점에 대해서는 길이가 $N-2f_v^b-2$ 인 고장 없는 경로를 L^{opt} -경로라고 한다. $f_v^b < f_v^w$ 일 때, 두 검정 정점 사이에 길이 $N-2f_v^w$ 인 고장 없는 경로, 서로 다른 색을 가진 두 정점 사이에 길이 $N-2f_v^w-1$ 인 고장 없는 경로, 두 흰색 정점 사이에 길이 $N-2f_v^w-2$ 인 고장 없는 경로를 L^{opt} -경로라고 한다. $f_v^b > f_v^w$ 인 경우에도 이와 유사하게 L^{opt} -경로를 정의할 수 있다. 길이 $N-2 \cdot \max\{f_v^b, f_v^w\}$ 인 고장 없는 사이클을 L^{opt} -사이클이라고 부른다. L^{opt} -경로와 L^{opt} -사이클의 길이는 고장 없는 경로와 사이클 중 그 길이가 최대이다.

임의의 두 정점 사이에 L^{opt} -경로를 가지는 이분 그래프를 *강한 해밀톤 laceable* (*strongly hamiltonian-laceable*) 그래프라고 말한다. $|F| \leq k$ 인 임의의 고장 집합 F 에 대해서, 고장이 아닌 임의의 두 정점 사이에 L^{opt} -경로를 가지는 이분 그래프 G 를 k -고장 강한 해밀톤 laceable (k -fault strongly hamiltonian-laceable) 그래프라고 말한다. 다음과 같이

고장 요소를 가진 P_m 과 C_n 의 그래프 곱 $P_m \times C_n$ 의 고장 해밀톤 성질이 알려져 있다 [17].

보조정리 5 [17] $P_m \times C_n$, $m \geq 2$, $n \geq 4$ 짝수는 1-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프이다.

보조정리 6 $G(2^4, 4)$ 는 1-고장 하이포해밀톤 연결된 그래프이다.

증명 고장인 요소가 하나인 경우만 고려하면 충분하다. $G(2^4, 4)$ 를 아래와 같이 네 가지 형태로 그릴 수 있다. 그림 1에서 1행에 있는 정점과 4행에 있는 정점을 잇는 에지를 세로 랩어라운드 에지라고 부른다. 각각에서 세로 랩어라운드 에지를 모두 제거하면 $P_4 \times C_4$ 와 동형인 그래프가 된다. $P_4 \times C_4$ 는 1-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프이므로 임의의 두 정점 간에 L^{opt} -경로를 가지게 된다. 이 L^{opt} -경로를 이용하여 우리가 원하는 $G(2^4, 4)$ 에서 하이포해밀톤 경로를 설계하기로 한다. 정점 w_i 는 i 가 홀수이면 홀수 정점, 짝수이면 짝수 정점이라고 부른다.

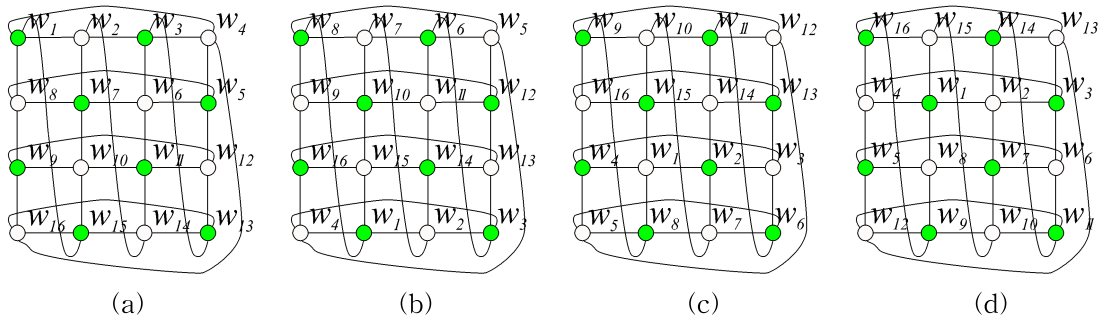


그림 1 $G(2^4, 4)$

경우 1 고장이 없거나 고장인 요소가 에지이다. 그림 1 (a)에서 두 홀수 정점 간에 L^{opt} -경로를 찾으려면 그것이 바로 $G(2^4, 4)$ 의 하이포해밀톤 경로가 된다. 두 짝수 정점 간에도 마찬가지이다. 따라서 홀수 정점과 짝수 정점 사이의 하이포해밀톤 경로만 고려하면 된다. 그림 (b)를 보면 $\{1, 3\}$ 과 $\{6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ 사이에, 그리고 $\{2, 4\}$ 과 $\{5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ 사이에도 하이포해밀톤 경로를 설계할 수 있음을 알 수 있다. 그것을 다음과 같이 나타내기로 한다.

$$1, 3 \Leftrightarrow 6, 8, 10, 12, 14, 16; 2, 4 \Leftrightarrow 5, 7, 9, 11, 13, 15$$

그림 (c), (d)를 보고 다음 사실을 관찰할 수 있다.

$$1, 3, 5, 7 \Leftrightarrow 10, 12, 14, 16; 2, 4, 6, 8 \Leftrightarrow 9, 11, 13, 15$$

$$1, 3, 5, 7, 9, 11 \Leftrightarrow 14, 16; 2, 4, 6, 8, 10, 12 \Leftrightarrow 13, 15$$

이제 남은 것은 $1, 3 \Leftrightarrow 2, 4$; $5, 7 \Leftrightarrow 6, 8$; $9, 11 \Leftrightarrow 10, 12$; $13, 15 \Leftrightarrow 14, 16$ 이다. 이것들이 서로 대칭적이므로 $1, 3 \Leftrightarrow 2, 4$ 간 하이포해밀톤 경로를 설계한다(그림 1 (a) 참조). v 를 w_1, w_3 중 하나라고 하고 나머지를 v' 이라고 두고, w 는 w_2, w_4 중 하나이고 남은 것을

w' 이라고 하자. 먼저 (w, v') 이 고장이 아닌 경우를 생각한다. v 와 인접한 2행의 정점을 x , 세로 랩어라운드 에지로 인접한 4행의 정점을 x' 이라고 하고, v' 과 인접한 2행의 정점을 y , 세로 랩어라운드 에지로 인접한 4행의 정점을 y' 이라고 하자. (v, x) , (v', y') 이 모두 고장이 아니거나 혹은 (v, x') , (v', y) 가 모두 고장이 아니다. 일반성을 잃지 않고 (v, x) , (v', y') 이 고장이 아니라고 하자. x 는 짝수 정점이고 y' 은 홀수 정점이다. 2행부터 4행까지의 정점들로 유도된(induced) 부그래프는 x , y' 사이에 보조정리 5에 의해서 L^{opt} -경로 P_1 을 가지게 되는데, 그것은 해밀톤 경로가 된다. 그러면, $P = (v, P_1, v', w)$ 이다. (w, v') 이 고장 에지인 경우에도 v 와 w 의 역할을 뒤바꾸면 대칭적이므로 위와 마찬가지로 성립한다.

경우 2 정점 하나가 고장이다. 그림 (a)에서 세로 랩어라운드 에지를 모두 제거한 그래프에서 홀수 정점과 짝수 정점 사이의 L^{opt} -경로가 바로 하이포해밀톤 경로가 된다. 홀수 정점 사이와 짝수 정점 사이의 하이포해밀톤 경로를 고려한다. 그림 (b), (c), (d)를 보고 다음을 관찰할 수 있다.

$$1, 3 \Leftrightarrow 5, 7, 9, 11, 13, 15; 2, 4 \Leftrightarrow 6, 8, 10, 12, 14, 16$$

$$1, 3, 5, 7 \Leftrightarrow 9, 11, 13, 15; 2, 4, 6, 8 \Leftrightarrow 10, 12, 14, 16$$

$$1, 3, 5, 7, 9, 11 \Leftrightarrow 13, 15; 2, 4, 6, 8, 10, 12 \Leftrightarrow 14, 16$$

남은 것은 $1 \Leftrightarrow 3$; $5 \Leftrightarrow 7$; $9 \Leftrightarrow 11$; $13 \Leftrightarrow 15$; $2 \Leftrightarrow 4$; $6 \Leftrightarrow 8$; $10 \Leftrightarrow 12$; $14 \Leftrightarrow 16$ 이다. 모두 대칭적이므로 $1 \Leftrightarrow 3$ 을 보이면 충분하다. 그림 1 (a)를 참조하라. 먼저 고장 정점이 1행에 있는 경우를 고려한다. v 와 인접한 2행 정점을 v' , w 와 인접한 4행 정점을 w' 이라고 둔다. P_1 을 2, 3, 4행 정점으로 유도된 부그래프에서 v' , w' 사이의 L^{opt} -경로라고 하면, $P = (v, P_1, w)$ 이다. 고장 정점이 1행이 아닌 다른 행에 있는 경우에, 1행에서 v , w 를 제외한 나머지 정점을 v' , w' 이라고 두자. v' 과 인접한 2, 4행 정점을 각각 x , x' 이라고 하고, w' 과 인접한 2, 4행 정점을 각각 y , y' 이라고 하자. x , y' 이 모두 고장이 아니거나 혹은 x' , y 가 모두 고장이 아니다. 일반성을 잃지 않고 x , y' 이 고장이 아니라고 하자. P_1 을 2, 3, 4 행 정점으로 유도된 부그래프에서 x , y' 사이의 L^{opt} -경로라고 하면, $P = (v, v', P_1, w', w)$ 이다. \square

정리 2 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 은 $m-3$ -고장 하이포해밀톤 연결된 그래프이다.

증명 m 에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다. $m = 3, 4$ 일 때는 앞의 보조정리 4, 6에서 증명하였다. $m \geq 5$ 를 가정한다. $G(2^m, 4)$ 는 $G(2^{m-2}, 4)$ 와 동형인 G_0, G_1, G_2, G_3 를 이용하여 재귀적으로 설계할 수 있다. G_0, G_1 의 정점으로 유도된 부그래프나 혹은 G_0, G_3 의 정점으로 유도된 부그래프를 H_0 라고 하고, 나머지 정점으로 유도된 부그래프를 H_1 이라고 하자. H_0 는 H_1 과 동형이며 또한 $G(2^{m-2}, 4) \times K_2$ 와 동형이다. H_0 와 H_1 에 속한 고장 요소의 수를 각각 f_0, f_1 이라고 하자.

경우 1 H_0 를 잘 정의하여 $f_0, f_1 \leq m-4$ 를 만족한다. 즉, 어떤 G_i , $0 \leq i \leq 3$ 도

$m-3$ 개의 고장 요소 모두를 포함하지 않은 경우를 말한다. H_0 와 H_1 각각은 보조정리 1과 정리 1에 의해서 $m-4$ -고장 해밀톤 연결된 그래프이고 $m-4$ -고장 하이포해밀톤 연결된 그래프이며 $m-3$ -고장 해밀톤 그래프임에 유의한다. 증명은 정리 1의 경우 1과 같으므로 생략한다. 정리 1의 경우 1 증명은 $H \times K_2$ 에서뿐만 아니라 $H \oplus H'$ 에서도 성립함을 관찰할 수 있다. 여기서 H' 은 H 와 동형인 그래프이다.

경우 2 어떤 G_i 가 $m-3$ 개의 고장 요소를 포함한다. 일반성을 잃지 않고 G_0 가 그렇다고 가정한다. 먼저 v, w 가 모두 G_2 에 속하는 경우를 고려한다. G_0, G_1 의 정점으로 유도된 부그래프를 H_0 라고 하고 나머지 정점으로 유도된 부그래프를 H_1 이라고 하자. H_0 는 해밀톤 사이클 C 를 갖는다. v 와 인접한 G_1 의 정점을 v' 이라고 하고, C 상에서 v' 과 인접한 정점 하나를 x' 이라고 하고, x' 과 인접한 G_2 의 정점 x 는 w 와 다르다고 가정한다. H_1 에서 v 를 고장 정점이라고 간주하고 x, w 사이의 하이포해밀톤 경로 P_1 을 찾는다. P_1 이 존재하는 것은 H_1 이 $m-4$ (≥ 1)-고장 하이포해밀톤 연결되어 있기 때문이다. 그러면 $P = (v, C - (v', x), P_1)$ 이다. 이제는 H_0 를 잘 정의하면 v, w 중 최소한 한 정점을 포함하게 된다. v, w 모두가 H_0 에 포함된 경우를 먼저 고려한다. H_0 에서 해밀톤 사이클 C 를 찾는다. 이 사이클에 에지 둘을 제거하여 두 경로로 나누는데, v 와 w 는 각각 다른 경로의 끝점이 되게 한다. 이 경로들을 $v-x$ 경로 P_0' , $y-w$ 경로 P_0'' 이라고 하자. 각각 x, y 와 인접한 H_1 의 정점을 x', y' 이라고 하고, H_1 에서 x', y' 사이의 하이포해밀톤 경로 P_1 을 찾는다. 그러면 $P = (P_0', P_1, P_0'')$ 이다. 마지막으로 v, w 중 하나, 일반성을 잃지 않고 v 가 H_0 에 포함된 경우를 고려한다. H_0 에서 해밀톤 사이클 C 를 찾는다. C 상에서 v 와 인접한 정점 하나를 v' 이라고 하고, v' 과 인접한 H_1 의 정점 w' 은 w 와 다르다고 하자. H_1 에서 w', w 를 잇는 하이포해밀톤 경로 P_1 을 찾는다. 그러면 $P = (C - (v, v'), P_1)$ 이다. \square

4 Almost pancyclic 그래프

이 절에서는 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 이 $m-2$ -고장 almost pancyclic 그래프임을 보인다. 이를 위하여 $G(2^m, 4) \times K_2$, $m \geq 3$ 이 $m-1$ -고장 almost pancyclic 그래프임을 함께 보이기로 한다. 아래 보조정리 7과 8은 정점 고장만을, 게다가 최대 개수의 고장 정점이 있는 경우를 고려하면 충분함을 말한다. $|F_v| \leq k$ 인 임의의 고장 정점 집합 F_v 에 대해서 $H - F_v$ 가 모든 길이 l , $4 \leq l \leq N - f_v$ 인 사이클을 가지는 그래프 H 를 k -정점 고장 almost pancyclic 그래프라고 한다. 여기서 N 은 H 의 정점 수이다.

보조정리 7 그래프 H 가 k -고장 해밀톤 그래프이며 k -정점 고장 almost pancyclic 그래

프라면, H 는 k -고장 almost pancyclic 그래프이다.

증명 고장 에지 수 f_e 에 대한 귀납법으로 증명한다. $f_e = 0$ 이면 성립한다. $f_e \geq 1$ 을 가정한다. 임의의 한 고장 에지 (x, y) 에서 한 끝정점을 고장 정점이라고 간주하면, 길이 4 이상 $N - f_v - 1$ 이하인 모든 사이클을 찾을 수 있다. N 은 H 의 정점 수이다. 이제 길이 $N - f_v$ 인 사이클만 찾으면 되는데, 그것은 바로 해밀톤 사이클이므로 가정에 의해서 존재한다. \square

보조정리 8 그래프 H 가 k -고장 해밀톤 그래프이며 고장 정점의 수가 k 개일 때 almost pancyclic 그래프이면, H 는 k -정점 고장 almost pancyclic 그래프이다.

증명 고장 정점의 수 f 가 k 보다 작은 경우에도 almost pancyclic 그래프임을 보이면 된다. 길이 l , $4 \leq l \leq N - k$ 인 사이클은 가정에 의해서 존재한다. 길이 l , $N - k < l \leq N - f$ 인 사이클은 f 개의 고장 정점과 다른 정점을 하나씩 (0 개부터) 고장 정점이라고 간주하여 해밀톤 사이클을 찾으면 된다. \square

이제 분지수가 3, 4인 재귀원형군과 그의 K_2 와 그래프 곱을 먼저 고려한 다음, 그 이상의 분지수를 가지는 그래프로 일반화한다.

보조정리 9 $G(2^3, 4)$ 는 1-정점 고장 almost pancyclic 그래프이다.

증명 $f = 1$ 인 경우를 고려하면 충분하다. 일반성을 잃지 않고 v_0 를 고장이라고 가정한다. 길이가 l , $4 \leq l \leq 7$ 인 사이클 C 를 설계한다. $l = 7$ 이면 $C = (v_1, v_2, v_6, v_7, v_3, v_4, v_5)$, $l = 6$ 이면 $C = (v_1, v_2, v_3, v_7, v_6, v_5)$, $l = 5$ 이면 $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, $l = 4$ 이면 $C = (v_1, v_2, v_6, v_5)$ 이다. \square

보조정리 10 $G(2^4, 4)$ 는 2-정점 고장 almost pancyclic 그래프이다.

증명 $f = 2$ 인 경우를 고려하면 충분하다. 일반성을 잃지 않고 w_4 를 고장 정점이라고 하고, 다른 고장 정점을 v_f 라고 하자. $G(2^4, 4)$ 가 그림 1 (a)와 같이 표현되어 있다고 하자. 행 i , $1 \leq i \leq 4$ 의 정점들로 유도된 부그래프를 G_{i-1} 라고 부른다. v_f 가 G_0 에 속하는 경우를 고려한다. 4 이상 12 이하인 짝수 l 에 대해서는 사이클을 다음과 같이 설계한다: $(w_5, w_{12}, w_{11}, w_6)$, $(w_5, w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{11}, w_6)$, $(w_5, w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}, w_{10}, w_{11}, w_6)$, $(w_5, w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}, w_{16}, w_9, w_{10}, w_{11}, w_6)$, $(w_5, w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}, w_{16}, w_9, w_8, w_7, w_{10}, w_{11}, w_6)$. 길이 14인 사이클은 해밀톤 사이클을 말하므로 존재한다. 일반성을 잃지 않고 $v_f \neq w_3$ 을 가정하고, 5 이상 13 이하인 홀수 l 에 대해서는 다

음과 같이 설계한다: $(w_3, w_{13}, w_{12}, w_5, w_6)$, $(w_3, w_{13}, w_{14}, w_{11}, w_{12}, w_5, w_6)$, $(w_3, w_{13}, w_{14}, w_{15}, w_{10}, w_{11}, w_{12}, w_5, w_6)$, $(w_3, w_{13}, w_{14}, w_{15}, w_{16}, w_9, w_{10}, w_{11}, w_{12}, w_5, w_6)$, $(w_3, w_{13}, w_{14}, w_{15}, w_{16}, w_9, w_8, w_7, w_{10}, w_{11}, w_{12}, w_5, w_6)$. 이제 v_f 가 G_0 에 속하지 않는 경우를 고려한다. 일반성을 잃지 않고 G_2, G_3 에 속한다고 가정한다. 1, 2행으로 유도된 부그래프를 H_0 , 3, 4행으로 유도된 부그래프를 H_1 이라고 하자. H_0, H_1 은 모두 1-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프이다. 먼저 짝수 사이클을 고려한다. H_0 에는 길이 4, 6인 사이클 C 가 있다. 이들 사이클 상의 에지 중 G_0, G_1 에 속하는 어떤 에지 (x, y) 를 선택하는데, 각각 x, y 와 인접한 H_1 의 정점 x', y' 이 v_f 와 다르도록 한다. H_1 에서 x', y' 을 잇는 L^{opt} -경로를 P_1 이라고 하면 $(C - (x, y), P_1)$ 은 각각 길이 10, 12인 사이클이 된다. (x, y) 를 G_0 나 G_1 에 속하는 어떤 에지라고 두고, 같은 방식으로 설계하면 길이 8인 사이클이 된다. 남은 것은 14인 사이클인데 그것은 바로 해밀톤 사이클이다. 홀수 사이클을 고려한다. v_f 가 짝수 정점인 경우와 홀수 정점인 경우로 나누어 생각한다. v_f 가 짝수 정점인 경우 사이클 $C_1 = (w_1, w_{15}, x, w_9, w_8)$ 이 고장 정점을 포함하지 않도록 x 를 w_{10}, w_{16} 중에서 선택한다. C_1 은 길이 5인 사이클이며, 이를 H_0 에서 확장하여 길이 7, 9인 사이클을 쉽게 얻을 수 있다. 11 이상인 홀수 사이클을 설계하기 위해 H_1 에서 w_{15}, w_9 를 잇는 L^{opt} -경로 P_1 을 찾는다. P_1 은 7개의 정점을 포함한다. 다음은 각각 길이 11, 13인 사이클이다: $(w_1, P_1, w_8, w_7, w_2)$, $(w_1, P_1, w_8, w_7, w_6, w_3, w_2)$. v_f 가 홀수 정점인 경우를 고려한다. 사이클 $C_2 = (w_2, w_{14}, y, w_{10}, w_7)$ 이 고장 정점을 포함하지 않도록 y 를 w_{11}, w_{15} 중에서 선택한다. 나머지는 v_f 가 짝수 정점인 경우와 같은 방식으로 증명할 수 있다. \square

보조정리 11 $G(2^3, 4) \times K_2$ 는 2-정점 고장 almost pancyclic 그래프이다.

증명 $f = 2$ 라고 가정한다. $G(2^3, 4)$ 의 두 복사본을 각각 H_0, H_1 이라고 하자. 두 고장 정점 모두가 H_0 에 속하는 경우는 아래 정리 3의 경우 1 증명이 $m = 4$ 일 때도 성립하므로 증명된다. 이제 H_0, H_1 각각이 하나씩 고장 정점을 가지고 있다고 가정한다. $G(2^3, 4)$ 의 정점 v_f 가 H_0 에 속하면 v_f^0 로 H_1 에 속하면 v_f^1 라고 나타낸다. 일반성을 잃지 않고 v_0^0 를 고장이라고 가정한다. 보조정리 9에서 보듯이 H_0 는 길이 7인 사이클 $C_0 = (v_1^0, v_2^0, v_6^0, v_7^0, v_3^0, v_4^0, v_5^0)$ 를 가진다. C_0 의 정점과 C_0 에 속한 각 정점과 인접한 H_1 의 정점들로 유도된 부그래프 H' 은, 고장 정점을 하나 이하 가지고 $P_2 \times C_7$ 과 동형이다. H' 이 길이 4, 6, 8, 10, 12인 사이클을 가지고 있음을 쉽게 알 수 있고, 길이 14인 사이클은 $G(2^3, 4) \times K_2$ 의 해밀톤 사이클이 된다. 이제 홀수 사이클을 고려한다. H_0 는 보조정리 9에 의해서 길이 5, 7인 사이클을 가진다. 남은 홀수 사이클은 H' 에서 설계하기로 한다. 일반

성을 잃지 않고 v_1^0 이 고장이라고 가정한다. $I = 9$ 이면 $C = (v_1^0, v_2^0, v_2^1, v_6^1, v_6^0, v_7^0, v_3^0, v_4^0, v_5^0)$, $I = 11$ 이면 $C = (v_1^0, v_2^0, v_2^1, v_6^1, v_6^0, v_7^0, v_7^1, v_3^0, v_3^1, v_4^0, v_5^0)$, $I = 13$ 이면 $C = (v_1^0, v_2^0, v_2^1, v_6^1, v_6^0, v_7^0, v_7^1, v_3^0, v_3^1, v_4^0, v_4^1, v_5^0, v_5^1)$ 이다. \square

정리 3 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 과 $G(2^{m-1}, 4) \times K_2$, $m \geq 4$ 는 $m-2$ -정점 고장 almost pancyclic 그래프이다.

증명 $G(2^m, 4)$ 와 $G(2^{m-1}, 4) \times K_2$ 의 분지수는 모두 m 이다. m 에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다. 분지수 $m = 3, 4$ 인 경우는 보조정리 9, 10, 11에서 증명되었으므로, $m \geq 5$ 라고 가정한다. $G(2^m, 4)$ 의 재귀적 구조에서 G_0, G_1, G_2, G_3 을 $G(2^{m-2}, 4)$ 의 복사본이라고 하자. G_0 와 G_1 의 정점으로 유도된 부그래프를 H_0 , 나머지 정점으로 유도된 그래프를 H_1 이라고 하면, $G(2^m, 4)$ 는 $H_0 \oplus H_1$ 에 속한 그래프의 일종이다. $G(2^{m-1}, 4) \times K_2$ 도 마찬가지이다. 따라서 H_0, H_1 은 각각이 정점의 수가 $N = 2^{m-1}$, 분지수가 $m-1$ 인 그래프로써 (i) $m-4$ -고장 해밀톤 연결된 그래프이고, (ii) $m-4$ -고장 하이포해밀톤 연결된 그래프이며, (iii) $m-3$ -정점 고장 almost pancyclic 그래프임을 가정할 때, $H_0 \oplus H_1$ 에 속한 임의의 그래프는 $m-2$ -정점 고장 almost pancyclic 그래프임을 보이면 충분하다. H_0, H_1 에 속한 고장 정점의 수를 각각 f_0, f_1 이라고 하고 $f_0 \geq f_1$ 임을 가정한다. 고장 정점의 수 $f = m-2$ 라고 가정한다. 설계하고자 하는 사이클 C 의 길이를 l 이라고 하자.

경우 1 $f_0 = m-2$. 길이 $4 \leq l \leq N$ 인 사이클은 H_1 이 가지고 있다. $l = N+1$ 인 사이클은 H_0 에서 고장이 아니고 인접한 두 정점 x, y 를 잡고, 각각 x, y 와 인접한 H_1 의 정점 x', y' 을 찾은 다음, H_1 에서 x', y' 을 잇는 하이포해밀톤 경로 P_1 을 찾는다. 그러면 $C = (x, y, P_1)$ 이다. 이제 길이 $N+2 \leq l \leq 2N-f$ 인 사이클을 설계한다. H_0 에서 해밀톤 경로 $P_0 = (w_0, w_1, \dots, w_{N-f-1})$ 을 찾는다. P_0 가 존재하는 것은 H_0 가 $m-3$ -정점 고장 해밀톤 그래프이기 때문이다. 각각 w_0, w_i 와 인접한 H_1 의 정점을 w_0', w_i' 이라고 하자, $1 \leq i \leq N-f-1$. H_1 에서 w_0', w_i' 을 잇는 해밀톤 경로를 P_1 이라고 하면, 길이 $N+i+1$ 인 사이클 $C = (w_0, w_1, \dots, w_i, P_1)$ 을 설계할 수 있다. (경우 1은 $m = 4$ 일 때도 성립한다.)

경우 2 $f_0, f_1 \leq m-3$. $f_1 = m-3$ 이라면 $f_0 \geq f_1$ 이므로 $f = f_0 + f_1 = (m-3) + (m-3) \leq m-2$, 즉 $m \leq 4$ 가 된다. 따라서 $f_1 \leq m-4$ 라고 가정한다. 길이 $4 \leq l \leq N-f_1$ 인 사이클은 H_1 이 가지고 있다. 길이 $l = N-f_1+1$ 인 사이클을 설계한다. H_0 에서 고장이 아닌 인접한 두 정점 x, y 를 잡고, 각각 그들과 인접한 H_1 의 정점 x', y' 이 고장이 아니도록 한다. H_1 에서 x', y' 을 잇는 하이포해밀톤 경로 P_1 을 찾으면, 사이클 $C = (x, y, P_1)$ 을 설계할 수 있다. 마지막으로 길이 $N-f_1+2 \leq l \leq 2N-f$ 인 사이클을

설계한다. H_0 에서 해밀톤 사이클 $C_0 = (w_0, w_1, \dots, w_{N-f_0-1})$ 을 찾는다. C_0 상에서 정점을 i , $2 \leq i \leq N-f_0$ 개 가진 경로 $P_0 = (w_j, w_{j+1}, \dots, w_{j+i-1 \pmod{N-f_0}})$ 를 찾는데, 각각 P_0 의 양끝점과 인접한 H_1 의 정점 x', y' 이 모두 고장이 아닌 것으로 한다. 그러한 P_0 가 존재하는 것은 C_0 의 길이가 f_1 보다 충분히 크기 때문이다. x', y' 을 잇는 H_1 의 해밀톤 경로를 P_1 이라고 하자. 그러면 $C = (P_0, P_1)$ 은 길이 $N - f_1 + i$ 인 사이클이다. \square

위의 정리 3과 보조정리 7에 의해서 다음이 성립한다.

따름정리 2 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 과 $G(2^{m-1}, 4) \times K_2$, $m \geq 4$ 는 $m-2$ -고장 almost pancyclic 그래프이다.

5 결론

이 논문에서는 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 은 고장인 요소의 수가 $m-2$ 개 이하일 때, 4 이상 $2^m - f_v$ 이하인 임의의 l 에 대하여 길이 l 인 고장 없는 사이클을 가짐을 보였다. 다시 말하면 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 은 $m-2$ -고장 almost pancyclic 그래프임을 증명하였다. 이것을 증명하기 위하여 $G(2^m, 4)$ 가 $m-3$ -고장 해밀톤 연결된 그래프이고 $m-2$ -고장 해밀톤 그래프임을 인용하고, $G(2^m, 4)$ 가 $m-3$ -고장 하이포해밀톤 연결된 그래프임을 증명하여 이용하였다.

참고문헌

- [1] D.A. Reed and R.M. Fujimoto, *Multicomputer Networks: Message-Based Parallel Processing*, The MIT Press, 1987.
- [2] J.-H. Park and K.Y. Chwa, "Recursive circulants and their embeddings among hypercubes," *Theoretical Computer Science*, vol. 244, pp. 35-62, Aug. 2000.
- [3] D.K. Biss, "Hamiltonian decomposition of recursive circulant graphs," *Discrete Mathematics*, vol. 214, pp. 89-99, Mar. 2000.
- [4] C. Micheneau, "Disjoint hamiltonian cycles in recursive circulant graphs," *Information Processing Letters*, vol. 61, pp. 259-264, Mar. 1997.
- [5] J.-H. Park, "Hamiltonian decomposition of recursive circulants," *International Symposium on Algorithms and Computation ISAAC'98 (LNCS #1533)*, Taejon, Korea, pp. 297-306, Dec. 1998.
- [6] T. Araki and Y. Shiba, "Pancyclicity of recursive circulant graphs," *Information Processing Letters*, vol. 81, pp. 187-190, Feb. 2002.

- [7] C.C. Chen and N.F. Quimpo, "On strongly hamiltonian abelian group graphs," *Lecture Notes in Mathematics* **884** (Springer, Berlin), Australian Conference on Combinatorial Mathematics, pp. 23-34, 1980.
- [8] J.-H. Park and K.Y. Chwa, "재귀원형군의 위상 특성: 서로소인 경로와 그래프 Invariant," *한국정보과학회논문지* **26(8)**, pp. 1009-1023, 1999.
- [9] C.-H. Tsai, J.M. Tan, Y.-C. Chuang, and L.-H. Hsu, "Fault-free cycles and links in faulty recursive circulant graphs," in *Proc. of Workshop on Algorithms and Theory of Computation ICS2000*, pp. 74-77, 2000.
- [10] C. Kim, J. Choi, and H.-S. Lim, "Embedding Full Ternary Trees into Recursive Circulants," *Lecture Notes in Computer Science #2510*, pp 874-882, 2001.
- [11] H.-S. Lim, J.-H. Park, and K.-Y. Chwa, "Embedding trees into recursive circulants," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 69, pp. 83-99, 1996.
- [12] Y.-C. Chen, J.J.M. Tan, L.-H. Hsu, and S.-S. Kao, "Super-connectivity and super-edge-connectivity for some interconnection networks," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 140, pp. 245-254, Aug. 2003.
- [13] G. Fertin and A. Raspaud, "Recognizing Recursive Circulant Graphs $G(\langle d \rangle^m, d)$," preprint, 2002.
- [14] M.E. Muzychuk and G. Tinhofer, "Recognizing circulant graphs in polynomial time: An application of association schemes," *The Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 8, #R26, 2001.
- [15] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, 5th printing, American Elsevier Publishing Co., Inc., 1976.
- [16] C.-D. Park, private communication, 2003.
- [17] J.-H. Park and H.-C. Kim, "Fault-hamiltonicity of product graph of path and cycle," in *Proc. of International Computing and Combinatorics Conference COCOON2003 (LNCS #2697)*, MT, USA, pp. 319-328, 2003.