재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$에서 서로소인 사이클*

박 정흠

가톨릭대학교 컴퓨터공학부

Disjoint Cycles in Recursive Circulant $G(2^m, 2^k)$

Jung-Heum Park

School of Computer Science and Engineering, Catholic University of Korea

요약

재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$는 다음의 조건을 만족할 때 길이가 l인 사이클을 가지며, 정점이 서로소이고 길이가 l인 $\lfloor 2^m/l \rfloor$개의 사이클로 분할할 수 있음을 보인다: (i) l은 짝수이고 $4 \le l \le 2^m$, 혹은 (ii) l은 홀수이고 $2^k + 1 \le l \le 2^m$. 이 조건은 사이클 존재와 사이클 분할 문제에 대해서 필요충분조건이 된다.

1 서론

사이클은 그래프 이론에서 중요한 개념으로 간주될 뿐만 아니라 사이클에 관련된 여러가지 성질은 다중컴퓨터 위상의 특성을 설명하는데 필수적이다. 이 논문에서는 재귀원형군의 여러가지 사이클에 관한 성질을 고찰하기로 한다. 재귀원형군은 사이클을 기반으로 설계되어 있어서 사이클에 관해서 유용한 성질을 많이 가지고 있을 것으로 기대할 수 있다.

재귀원형군은 [8]에서 제안된 다중컴퓨터의 위상이다. 재귀원형군 $G(N, d)$는 N개의 노드 $\{v_0, v_1, \cdots, v_{N-1}\}$을 가지고 $s + d^i \equiv t \pmod N$을 만족하는 $0 \le i \le \lceil \log_d N \rceil - 1$이 존재하면 두 노드 v_s, v_t를 잇는 에지가 있다. 각각의 d^i를 점프라고 부른다. $G(N, d)$를 N보다 작은 모든 d의 거듭제곱을 점프로 가지는 circulant 그래프 $C_N(d^0, d^1, \cdots, d^{\lceil \log_d N \rceil - 1})$이라고 정의할 수 있다. 여기서는 N과 d가 2의 거듭제곱으로 제한된 재귀원형군, 즉 $N = 2^m$, $d = 2^k$인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$를 고려한다.

재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$는 해밀톤 사이클, 즉 길이가 2^m인 사이클을 가지고 있다. 더구나 에지가 서로소인 해밀톤 사이클로 분할, 즉 해밀톤 분할 문제에 있어서 $G(2^m, 2^k)$뿐만 아니라 $G(cd^m, d)$도 해밀톤 분할이 가능함이 알려져 있다 [6, 7].

사이클과 밀접한 관계가 있는 경로에 관해서는 최단 경로 [8], 길이가 제한된 서로소인 경로 [1] 등이 대하여 연구되어 있다. 또한 분지수가 3 이상인 재귀원형군에서 임의의 정점쌍을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다. 이 성질은 재귀원형군을 포함하는 abelian 군에 대한 Cayley 그래프에서 성립함이 알려져 있다 [4].

*이 논문은 1997년 학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.

이 논문에서 관심을 가지고 있는 것은 사이클의 길이가 임의의 정수 l로 주어졌을 때, 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$에 길이가 l인 사이클이 존재하는가 하는 사이클 존재 문제와, 만약 존재한다면 서로소인 최대 개수의 사이클로 분할이 가능한가 하는 사이클 분할 문제이다. 여기서 서로소인 사이클이라는 것은 모든 정점이 서로 다른 사이클을 말하는 것이고, 최대 개수라는 것은 $\lfloor 2^m/l \rfloor$개를 말한다.

문제 1 **어떤 정수 l에 대해서 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$는 길이 l인 사이클을 가지는가?**

문제 2 **어떤 정수 l에 대해서 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$는 길이 l인 서로소인 사이클 $\lfloor 2^m/l \rfloor$개로 분할이 가능한가?**

하이퍼큐브 Q_m은 이분 그래프이며 $2 \times 2^{m-1}$ 그리드(grid) 그래프을 스패닝 부그래프로 가지고 있어서, 길이가 짝수인 모든 사이클을 가지는 bipancyclic 그래프이며, 최대 개수의 사이클로 분할이 가능하다. 그리드 그래프에 대해서는 모든 짝수 사이클을 가지고 있어 bipancyclic 그래프가 되며, 정점의 수가 짝수인 경우에 최대 개수의 사이클로 분할됨이 밝혀져 있다 [2].

서로소인 사이클로 분할 하는 문제를 이용하면 고장 감내에 대한 중요한 척도중의 하나인 순차적 고장 진단도를 분석할 수 있다. 사이클 분할 문제를 이용하여 하이퍼큐브의 순차적 고장 진단도가 분석된 바 있으며 [5], 이 논문의 결과는 $G(2^m, 2^k)$의 순차적 고장 진단도의 분석에 응용할 수 있다.

이 논문에서 고려하는 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$는 $k < m$인 경우이다. 그렇지 않으면 $G(2^m, 2^k)$는 단지 길이 2^m인 사이클 그래프가 된다. 그리고 여기서 정의하지 않은 그래프 이론적인 용어는 [3]을 따른다.

2 재귀원형군

재귀원형군 $G(N, d)$는 $N = cd^m$, $1 \le c < d$일 때 재귀적 구조를 갖는다. 다시 말하면, $G(cd^m, d)$는 아래 성질을 이용하여 재귀적으로 정의할 수 있다.

성질 3 *V_i를 다음과 같이 정의되는 $G(cd^m, d)$, $m \ge 1$의 정점 부분집합이라고 하자: $V_i = \{v_j \,|\, j \equiv i \pmod{d}\}$. 모든 $0 \le i \le d-1$에 대해서 V_i로 유도된 $G(cd^m, d)$의 부그래프는 $G(cd^{m-1}, d)$와 동형이다.*

$G(cd^m, d)$, $m \ge 1$는 다음과 같이 d개의 $G(cd^{m-1}, d)$를 이용하여 설계할 수 있다. $G_i(V_i, E_i)$, $0 \le i \le d-1$를 $G(cd^{m-1}, d)$와 동형인 그래프라고 하고 $V_i = \{v_0^i, v_1^i, \cdots, v_{cd^{m-1}-1}^i\}$라 두자. 그리고 G_i는 v_j^i을 v_j에 대응시키는 사상에 의해서 $G(cd^{m-1}, d)$와 동형이라고 하자. v_j^i를 v_{jd+i}로 다시 레이블한다. $G(cd^m, d)$의 정점 집합 V는 $\bigcup_{0 \le i \le d-1} V_i$이고, 에지 집합 E는 $\bigcup_{0 \le i \le d-1} E_i \cup X$이다. 여기서 $X = \{(v_j, v_{j'}) \,|\, j+1 \equiv j' \pmod{cd^m}\}$이다.

$G(2^m, 2^k)$의 분지수를 δ_m이라고 하자. $m > k$에 대해서 $\delta_m = \delta_{m-k} + 2$이므로, δ_m을 closed-form으로 나타내면 다음과 같다.

$$\delta_m = \begin{cases} 2\lceil m/k \rceil - 1 & k\text{가 } m-1\text{을 나눌 때;} \\ 2\lceil m/k \rceil & \text{그렇지 않을 때.} \end{cases}$$

여기서 k가 $m-1$을 나누는 경우는 대각 점프, 즉 크기가 $2^m/2$인 점프를 가지는 경우이다.

3 $G(2^m, 2^k)$의 서로소인 사이클

우선 그래프 $H(l, 2^k)$를 정의하고자 한다. $H(l, 2^k)$의 l개의 정점 $\{0, 1, \cdots, l-1\}$을 가지고, 에지 집합은 $\{(i, j) \mid j = i+1$ 혹은 $j = i + 2^k\}$이다. $H(l, 2^k)$는 당연히 $G(2^m, 2^k)$의 부그래프가 된다.

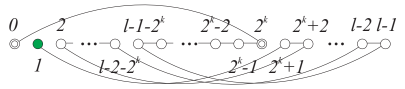
만약 $H(l, 2^k)$가 길이 l인 사이클, 즉 해밀톤 사이클을 가진다면, 연속적인 l개의 정점으로 유도된 $G(2^m, 2^k)$의 부그래프도 해밀톤 사이클을 가진다. 따라서 $G(2^m, 2^k)$는 $\lfloor 2^m/l \rfloor$개의 서로소인 사이클로 분할이 가능하게 된다.

보조정리 4 *l을 홀수라고 하자. $l \ge 2^k + 1$이면 $H(l, 2^k)$는 해밀톤 사이클을 가지며 그 역도 성립한다.*

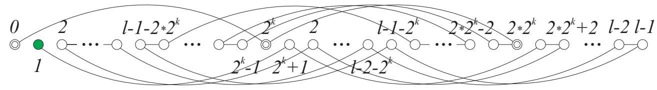
증명 $l \le 2^k - 1$이면 $H(l, 2^k)$는 길이 l인 경로로 이루어진 그래프이므로 필요조건임은 당연하다. 충분조건임을 증명하기로 한다. $2^k \le l < 2 \cdot 2^k$인 경우에는 다음과 같이 0과 1을 잇는 해밀톤 경로 P_1을 정의할 수 있으며, 에지 $(0, 1)$과 함께 해밀톤 사이클을 이룬다(그림 1 (a) 참조).

$$P_1 = 0, 2^k, 2^k - 1, 2^k - 2, \cdots, l - 2 - 2^k,$$
$$l - 1 - 2^k, l - 1, l - 2, l - 2 - 2^k,$$
$$\cdots$$
$$2, 2^k + 2, 2^k + 1, 1$$

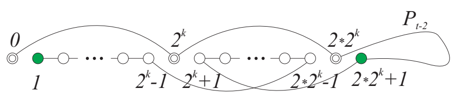
$2 \cdot 2^k \le l < 3 \cdot 2^k$인 경우에도 위와 마찬가지로 0과 1을 잇는 해밀톤 경로 P_2를 정의할 수 있다(그림 1 (b) 참조).



(a)



(b)



(c)

그림 1: 보조정리 4 증명의 설명

$$P_2 = 0, 2^k, 2 \cdot 2^k, 2 \cdot 2^k - 1, 2^k - 1, 2^k - 2, 2 \cdot 2^k - 2,$$
$$\cdots$$
$$l - 2^k, l - 2 \cdot 2^k,$$
$$l - 1 - 2 \cdot 2^k, l - 1 - 2^k, l - 1, l - 2, l - 2 - 2^k, l - 2 - 2 \cdot 2^k,$$
$$\cdots$$
$$2, 2^k + 2, 2 \cdot 2^k + 2, 2 \cdot 2^k + 1, 2^k + 1, 1$$

이제 $t \ge 2$에 대하여 $t \cdot 2^k \le l < (t+1) \cdot 2^k$일 때 0과 1을 잇는 해밀톤 경로 P_t를 재귀적으로 설계할 수 있다(그림 1 (c) 참조). 여기서 P'_{t-2}을 P_{t-2}의 모든 정점에 $2 \cdot 2^k$를 더하여 얻어지는 경로이다.

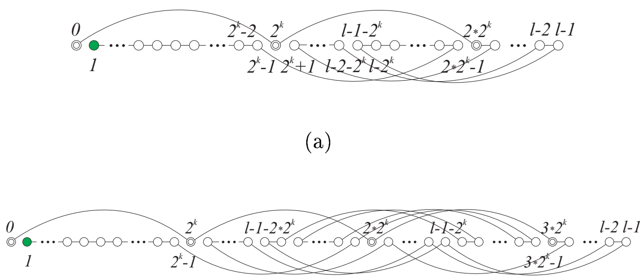
$$P_t = 0, 2^k, 2 \cdot 2^k, P'_{t-2}, 2 \cdot 2^k + 1, 2^k + 1, 2^k + 2, \cdots, 2 \cdot 2^k - 1,$$
$$2^k - 1, 2^k - 2, \cdots, 2, 1$$

위의 설계를 반복 적용하여 $t \ge 1$인 모든 t에 대해서 P_t를 설계할 수 있으므로, 증명이 완성된다. □

보조정리 5 *l을 짝수라고 하자. $l \ge 2 \cdot 2^k$이면 $H(l, 2^k)$는 해밀톤 사이클을 가지며 그 역도 성립한다.*

증명의 개요 필요조건임을 증명하기 위하여 $H(l, 2^k)$가 해밀톤 사이클, 즉 길이 l인 사이클을 가진다고 하자. 이 때 $l < 2 \cdot 2^k$이다. 그러면 $\{0, 1, ..., l-1-2^k, 2^k, 2^k+1, \cdots, l-1\}$로 유도된 부그래프에서 $l - 1 - 2^k$와 2^k를 잇는 해밀톤 경로가 존재해야 한다. 유도된 그래프는 $l - 2^k \times 2$ 그리드 그래프와 동형이므로 이분 그래프이며 서로 같은 개수의 색으로 정점을 색칠할 수 있으므로, 모순임을 알 수 있다. 충분조건임을 보이는 것은 보조정리 4와 유사하다. 자세한 증명은 생략하고 그림 2을 참조한다. 여기서 설계한 해밀톤 사이클도 에지 $(0, 1)$를 지난다. □

보조정리 4와 5에 의해서 (i) l이 홀수이고 $l \ge 2^k + 1$일 때와 (ii) l이 짝수이고 $l \ge 2 \cdot 2^k$일 때에는 사이클 존재 문제 뿐만 아니라, 사이클 분할 문제가 해결되었다. 이제 나머지 경우에 대해서 생각하여 보기로 한다.



(a)

(b)

그림 2: 보조정리 5 증명의 설명

$G(2^m, 2^k)$에서 크기가 1이거나 2^k이 아닌 모든 에지를 제거하면 circulant 그래프 $C_{2^m}(1, 2^k)$이 되는데, 이것은 $2^k \times 2^{m-k}$ 그리드 그래프를 스패닝 부그래프로 포함한다. 정점의 수가 짝수인 그리드 그래프는 모두 서로소인 사이클로 분할이 가능하므로 [2] 다음을 얻을 수 있다.

보조정리 6 모든 짝수 l에 대해서 $G(2^m, 2^k)$는 길이 l인 사이클을 가지며, 가능한 최대 개수의 사이클로 분할이 가능하다.

이제 어떤 l에 대해서 $G(2^m, 2^k)$가 길이 l인 사이클을 가지는지하는 사이클 존재 문제를 생각하기로 한다.

정리 7 $G(2^m, 2^k)$는 l이 짝수이고 $4 \le l \le 2^m$이거나, 혹은 l이 홀수이고 $2^k + 1 \le l \le 2^m$일 때 길이 l인 사이클을 가지며, 그 역도 성립한다.

증명 l이 짝수일 때는 보조정리 6에 의해서 증명된다. $G(2^m, 2^k)$은 길이가 $2^k - 1$ 이하인 홀수 길이의 사이클을 가지지 않음을 보인다. 증명을 위해서 만약 그런 사이클 C를 가지고 있다고 가정하자. 일반성을 잃지 않고 C는 $G_0, G_1, \cdots, G_t$상의 정점을 지나지만 G_{2^k-1}에 있는 어떤 정점도 지나지 않는다고 하자. C를 G_0에 프로젝트시키면 C는 길이가 홀수인 닫힌 워크(closed walk)가 된다. 따라서 G_0는 길이 $2^k - 1$ 이하인 홀수 사이클을 가지게 된다. 이와 같은 방식으로 재귀 구조를 이용하여 계속하면 $G(2^{m'}, 2^k)$, $m' \le k$이 홀수 길이의 사이클을 가진다는 결론에 도달하게되어 모순된다. 따라서 보조정리 4에 의해서 정리의 증명이 완성된다. □

만약 $G(2^m, 2^k)$가 길이 l인 사이클을 가진다면 정리 7의 조건을 만족할 것이고, l의 크기와 홀수인지 짝수인지에 따라 보조정리 4, 5, 6에 의해서 아래 정리가 증명된다.

정리 8 $G(2^m, 2^k)$이 $\lfloor 2^m/l \rfloor$개의 서로소인 사이클로 분할될 필요충분조건은 $G(2^m, 2^k)$가 길이 l인 사이클을 가진다는 것이다.

따름정리 9 *(a)* $G(2^m, 2)$는 모든 길이의 사이클을 가지고 있는 *pancyclic* 그래프이며, 서로소인 사이클로 분할이 가능하다. *(b)* $G(2^m, 4)$는 길이 4 이상인 모든 사이클을 가지고 있는 *almost pancyclic* 그래프이며, 서로소인 사이클로 분할이 가능하다.

위의 따름정리 9 (b)를 보이고자 할 때, 길이가 짝수인 사이클을 고려할 경우 보조정리 6을 이용하지 않고도 $G(2^m, 4)$가 $2 \times 2^{m-1}$ 그리드 그래프을 스패닝 부그래프로 가진다는 사실을 이용하여 증명할 수 있다.

참고 $G(2^m, 2^k)$의 사이클 존재 문제나 분할 문제에서 모두 크기가 1이거나 2^k인 에지만 사용하였다. 따라서 $G(2^m, 2^k)$는 서로소인 사이클 분할 문제보다 강한 어떤 사이클에 관한 성질을 만족할 여지가 있다고 볼 수 있다.

참고 정리 7와 8은 $G(cd^m, d)$, d가 짝수인 경우로 쉽게 확장할 수 있다.

4 결론

재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$는 모든 짝수 l과 크기가 $2^k + 1$ 이상인 모든 홀수 l에 대해서 길이 l인 사이클을 가지며, 길이가 같은 최대 개수의 사이클로 분할할 수 있음을 보였다. 이 결과를 $G(cd^m, d)$의 사이클 존재나 분할 문제로 확장하는 것은 연구과제로 남아 있다. 더 나아가서는 해밀톤 사이클의 개수를 구하는 문제 등도 흥미있는 연구 문제이다.

참고문헌

[1] 박 정흠, 좌 경룡, "재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$에서 길이가 제한된 서로소인 경로," **한국정보과학회 봄 학술발표논문집 25(1)** pp. 685-687, 1998.

[2] 신 찬수, 박 종대, 박 정흠, 좌 경룡, "2차원 그리드 그래프의 사이클 분할," 미발표.

[3] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, 5th printing, American Elsevier Publishing Co., Inc., 1976.

[4] C. C. Chen and N. F. Quimpo, "On strongly hamiltonian abelian group graphs," *Lecture Notes in Mathematics* **884** (Springer, Berlin), Australian Conference on Combinatorial Mathematics, pp. 23-34, 1980.

[5] A. Kavianpour and K. H. Kim, "A comparative evaluation of four basic system-level diagnosis strategies for hypercubes," *IEEE Trans. Reliability* **41(1)**, pp. 26-37, 1992.

[6] C. Micheneau, "Disjoint hamiltonian cycles in recursive circulant graphs," *Information Processing Letters* **61**, pp. 259-264, 1997.

[7] J.-H. Park, "Hamiltonian decomposition of recursive circulants," *ISAAC'98*, Taejon, Korea, 1998 (to appear).

[8] J.-H. Park and K.-Y. Chwa, "Recursive circulant: a new topology for multicomputer networks," *IEEE ISPAN'94*, Kanazawa, Japan, pp. 73-80, 1994.