재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$에서 길이가 제한된 서로소인 경로*

박 정흠○, 좌 경룡†

○가톨릭대학교 컴퓨터공학부

†한국과학기술원 전산학과

Disjoint Paths of Bounded Length in Recursive Circulant $G(2^m, 2^k)$

Jung-Heum Park○ and Kyung-Yong Chwa†

○Division of Computer Engineering, Catholic University of Korea

†Department of Computer Science, KAIST

요약

재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 서로 다른 두 노드 사이에 있는 연결도 만큼의 서로소인 경로의 길이가 두 노드 사이의 거리나 혹은 재귀원형군의 지름에 비해서 얼마나 늘어나는지를 고려한다. 이 결과를 이용하여 재귀원형군의 고장 지름이나 persistence를 분석하여 본다.

1 서론

다중컴퓨터 네트워크에서 고장 감내에 관한 공통적인 개념은 역시 그 네트워크를 모델한 그래프의 연결도일 것이다. 연결도가 $\kappa(G)$인 그래프는 임의의 $\kappa(G)-1$개의 노드에 고장이 발생하더라도 그래프가 연결되어 있다는 보장이 있다. Menger 정리에 의하면 연결도가 $\kappa(G)$인 그래프는 임의의 두 노드 사이에 $\kappa(G)$개의 서로소인 경로가 존재한다. 이 논문은 임의의 두 노드 사이에 얼마나 길이가 짧은 $\kappa(G)$개의 서로소인 경로가 존재하느냐는 것에 관심이 있다. 이러한 기본적인 성질은 다중컴퓨터 네트워크의 고장 감내 기술을 개발함에 도움이 된다.

이 논문의 연구 대상인 재귀원형군은 [7]에서 제안되었다. 재귀원형군 $G(N, d)$는 N개의 노드 $\{0, 1, \cdots, N-1\}$을 가지고 $v + d^i \equiv w \pmod N$을 만족하는 $0 \le i \le \lceil \log_d N \rceil - 1$이 존재하면 두 노드 v, w를 잇는 에지가 있다. 여기서는 N과 d가 2의 거듭제곱으로 제한된 재귀원형군, 즉 $N = 2^m$, $d = 2^k$인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$를 고려한다.

재귀원형군 $G(N, d)$의 연결도 $\kappa(G)$는 분지수 $\delta(G)$와 같다고 알려져 있다 [2]. 이 논문은 $G(2^m, 2^k)$에서 길이가 짧은 서로소인 경로에 관심이 있다. 이 때 $\kappa(G)$개의 서로소인 경로의 길이는 각 경로의 길이의 최대값으로 정의한다. 서로소인 경로의 길이는 물론 두 노드 v, w 사이의 거리 $d(v, w)$보다 짧을 수는 없다. 또한 모든 노드 쌍에 대한 서로소인 경로의 길이를 생각하면 그것은 물론 그래프의 지름 $dia(G)$보다 작아질 수 없다. 따라서 다음과 같이 서로소인 경로의 길이가 두 노드 사이의 거리나 혹은 지름에 비해서 얼마나 커지는가하는 문제를 고려한다.

문제 1 *$G(2^m, 2^k)$에서 서로 다른 노드 쌍 v, w에 대해서 길이가 $d(v, w) + \Delta_1$ 이하인 κ개의 서로소인 경로가 존재하기 위해서는 Δ_1 값은 얼마나 될까?*

문제 2 *$G(2^m, 2^k)$에서 서로 다른 노드 쌍에 대해서 길이가 $dia(G) + \Delta_2$ 이하인 κ개의 서로소인 경로가 존재하기 위해서는 Δ_2 값은 얼마나 될까?*

고장 지름과 persistence에 대해서 Menger 정리와 유사하게 서로소인 경로를 이용하여 설명할 수 있다. 그래프 G의 고장 지름은 G에서 임의의 $\kappa(G)-1$개 이하의 노드를 삭제하고 남은 그래프의 최대 지름을 말한다. 그리고 persistence는 G의 지름을 늘이기 위해서 삭제하여야 할 노드의 최소 개수이다. 아래 두 정리의 역은 일반적으로 성립하지 않는다고 알려져 있다.

*이 논문의 제 1 저자는 1997년 학술진흥재단의 공모과제 연구비를 지원받았음.

정리 1 *[6] 그래프 G에서 임의의 두 노드 사이에 길이가 f 이하인 $\kappa(G)$개의 서로소인 경로가 존재하면, 고장 지름 $fd(G) \le f$이다.*

정리 2 *[3, 5] 그래프 G에서 임의의 인접하지 않은 두 노드 사이에 길이가 $dia(G)$ 이하인 서로소인 경로가 f개 이상이면, persistence $per(G) \ge f$이다.*

재귀원형군에서 $N = cd^m, 1 \le c < d$인 경우 $G(cd^m, d)$는 재귀적 구조를 가지고 있어서 d개의 $G(cd^{m-1}, d)$를 이용하여 $G(cd^m, d)$를 설계할 수 있다 [7].

재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 분지수는 $2\lceil m/k \rceil - \alpha(m,k)$인데, 여기서 $\alpha(m,k)$는 k가 $m-1$을 나눌 수 있으면 1이고 그렇지 않으면 0이다. k가 $m-1$을 나누는 경우는 대각 점프, 즉 크기가 2^{m-1}인 점프를 가지는 경우이다. $G(2^m, 2^k)$의 지름에 대해서는 다음이 성립한다.

정리 3 *[7]*
(a) $dia(G(2^m, 2^k)) = dia(G(2^{m-2k}, 2^k)) + (2^k - 1)$, $m \ge 2k$.
(b) k가 m을 나눌 때 $G(2^m, 2^k)$의 지름은 $\lceil \frac{2^k-1}{2} \lfloor \frac{m}{k} \rfloor \rceil$이며, 그렇지 않으면 $\lfloor \frac{2^k-1}{2} \lfloor \frac{m}{k} \rfloor \rfloor + 2^{m \pmod{k}-1}$이다.

이 논문에서 정의하지 않은 그래프 이론적인 용어는 [4]를 따른다.

2 $d(v,w) + \Delta_1$ 이하인 서로소인 경로

정리 4 *$G(2^m, 2^k)$, $k \ge 2$에 있는 임의의 두 노드 v, w에 대해서 다음 조건을 만족하는 $\kappa(G)$개의 서로소인 경로가 존재한다.*
(a) 각 경로의 길이는 $d(v,w) + (2^k - 1)$ 이하이다.
(b) 최소한 한 경로의 길이는 $d(v,w)$이다.

증명 m에 대한 귀납법으로 증명한다. $m \le k$이면 $G(2^m, 2^k)$는 길이가 2^m인 사이클 그래프가 되므로, 위의 조건을 만족하는 서로소인 경로가 존재한다. 재귀원형군이 노드 대칭적으므로 일반성을 잃지 않고 $v = 0$임을 가정한다. $G(2^m, 2^k)$에서 모듈로 2^k로 i가 되는 노드들로 유도된 부그래프(induced subgraph)를 G_i라고 하자. G_i는 $G(2^{m-k}, 2^k)$와 동형이다.

경우 1 w가 G_0의 노드일 때(그림 1 (a) 참조)
귀납적 가설에 의해서 G_0 상에서 v에서 w까지 위의 조건을 만족하는 서로소인 경로가 $\kappa(G_0)$개가 존재한다. v에서 v'을 거쳐 G_1상에서 w'까지 최단 경로를 지나 다시 w를 잇는 경로를 P_1이라고 하자. 그리고 P_1과 유사하게 v'', w''을 지나 w까지의 경로를 P_2라고 하자. P_1의 길이는 $1 + d(v', w') + 1 = d(v,w) + 2$가 된다. $k \ge 2$이므로 위의 조건을 만족하게 된다. 마찬가지로 P_2에 대해서도 성립한다.

경우 2 w가 $G_i, i \ne 0$의 노드일 때(그림 1 (b), (c) 참조)
$1 \le i \le 2^{k-1}$임과 v에서 w까지의 최단 경로는 w''을 지난다고 가정하자. 이 가정이 성립하지 않는 경우는 그래프의 모든 노드에 $2^k - i$를 더한 다음 모듈로 2^m을 취하여 노드를 새로 정의한 다음 w에서 v까지의 경로를 생각하면 마찬가지 경우가 된다. 우선 $w'' \ne v$인 경우를 고려한다. 귀납적 가설에 의해서 G_0상에서 w''까지의 $\kappa(G_0)$개의 서로소인 경로가 존재한다. 이들 중 길이가 $d(v, w'')$인 경로 하나를 제외한 모든 서로소인 경로에 대해서 w''에 도달하기 직전의 노드에서 $G_2, \cdots, G_i$까지 도달한 다음 바로 w까지 잇는 경로로 확장한다. 제외해 두었던 경로는 w''을 지나 w까지 바로 잇는다. 그리고 v에서 $G_2, \cdots, G_i$에 있는 노드를 차례로 지난 다음 G_0 상에서 v에서 w''까지 경로와 대응되는 경로를 통하여 w에 도달하는 경로를 P_1이라고 하자. 그리고 v에서 G_{2^k-1}에 있는 노드 v'을 지난 다음 v''을 지나고, 다시 P_1과 마찬가지로 G_0 상에서 v에서 w''까지 경로와 대응되는 경로를 지나 w'에 도달한 다음 $G_{2^k-2}, G_{2^k-3}, \cdots, G_i$로 가는 경로를 P_2라고 하자. P_1의 길이는 $d(v,w)$와 같음을 쉽게 알 수 있다. 그리고 P_2의 길이는 $d(v,w) = d(v,w'') + i$라는 사실을 이용하면 $1 + 1 + d(v,w'') + (2^k - 1 - i) = d(v,w) + (2^k - 1) + (2 - 2i)$가 된다. $i \ge 1$이므로 P_2의 길이는 $d(v,w) + (2^k - 1)$ 이하가 된다.

이제 마지막으로 $w'' = v$인 경우를 고려한다. G_0 상에서 v에 인접한 각 노드를 지나 $G_2, \cdots, G_i$에 있는 노들 지난 다음 w에 도달한다. 그리고 P_1은 v에서 직접 $G_2, \cdots, G_{i-1}$을 지나 w에 도달한다. P_2는 G_{2^k-1}에 있는 노드 v'을 지난 다음 v''을 지나고 다시 $G_{2^k-2}, G_{2^k-3}, \cdots, G_{i+1}$를 지나 w에 도달한다. 이 경우 $d(v,w) = i$가 되며 P_1은 최단 경로가 된다. P_2를 제외한 나머지 경로의 길이는 $1 + i + 1$이 되어 위의 조건을 만족하며, 경로 P_2의 길이는 $1 + 1 + (2^k - 1 - i) = i + (2^k - 1) + (2 - 2i) \ge i + (2^k - 1)$이 성립하므로 증명이 완성된다. □

그림 1: 정리 4 증명의 설명

위 정리에 의하면 $G(2^m, 4)$에서 Δ_1이 3 이하임을 알 수 있다. 하이퍼큐브 Q_m에서는 Δ_1이 2임이 밝혀져 있다 [8].

$G(2^m, 4)$에서 $m = 3, 4, 5$인 경우는 Δ_1이 3이 된다.

이제 $G(2^m, 2)$의 서로소인 경로를 고려한다. $G(2^m, 2)$는 두 개의 $G(2^{m-1}, 2)$를 이용하여 재귀적으로 설계할 수 있지만, $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 2$와는 달리 G_0의 한 노드에 인접한 G_1의 노드가 둘이다. 따라서 아래와 같은 보조정리가 필요하며, 이를 이용하면 위의 정리와 유사하게 증명을 완성할 수 있다.

보조정리 1 *$G(2^m, 2)$는 $\{v, v+1\}$과 $\{w, w+1\}$ 사이에 길이가 $d(v, w)$ 이하인 두개의 서로소인 경로를 가진다. 그 경로는 v-w 경로와 $(v+1)$-$(w+1)$ 경로이거나, 혹은 v-$(w+1)$ 경로와 $(v+1)$-w 경로이다.*

정리 5 *$G(2^m, 2)$에 있는 임의의 두 노드 v, w 사이에 다음 조건을 만족하는 $\kappa(G)$개의 서로소인 경로가 존재한다.*
(a) 각 경로의 길이는 $d(v, w) + 3$ 이하이다.
(b) 최소한 한 경로의 길이는 $d(v, w)$이다.

$G(2^3, 2)$에서 Δ_1은 2이고, $G(2^4, 2)$에서 Δ_1은 3이다.

3 $dia(G) + \Delta_2$ 이하인 서로소인 경로

이 절에서는 서로소인 경로의 길이가 지름에 비해서 얼마나 늘어나는가를 고려한다. $G(2^m, 2^k)$의 지름은 $G(2^{m-k}, 2^k)$의 지름에 비해서 $2^{k-1} - 1$ 혹은 2^{k-1}이 늘어나지만, 정리 3에서 보는 바와 같이 $G(2^{m-2k}, 2^k)$의 지름과 비교할 때 그 차이는 항상 $2^k - 1$이 된다. 서로소인 경로가 지름에 비해서 얼마나 늘어나느냐를 고려할 때 G_0를 다시 재귀적으로 구성할 필요가 있다. 이 절에서 제시한 정리의 증명은 이러한 관찰에서 시작하여 완성할 수 있다.

정리 6 *$G(2^m, 2^k)$, $k \geq 2$에 있는 서로 다른 두 노드 사이에 다음 조건을 만족하는 $\kappa(G)$개의 서로소인 경로가 존재한다.*
(a) 각 경로의 길이는 $dia(G) + 2^{k-1}$ 이하이다.
(b) 최소한 $\lfloor \delta(G)/2 \rfloor$개의 경로의 길이는 $dia(G)$ 이하이다.

$G(2^3, 4)$와 $G(2^4, 4)$에서는 Δ_2가 모두 2이지만, $G(2^5, 4)$에서 $\Delta_2 = 1$이다.

따름정리 1 *$G(2^m, 2^k)$, $k \geq 2$의 고장 지름은 $dia(G) + 2^{k-1}$ 이하이며, persistence는 $\lfloor \delta(G)/2 \rfloor$ 이상이다.*

$G(2^m, 4)$의 고장 지름은 위의 따름 정리에 의하면 $\lceil \frac{3m-1}{4} \rceil + 2$ 이하라고 말하는 것이지만, [1]에서 $m \geq 5$인 경우에 고장 지름이 $\lceil \frac{3m-1}{4} \rceil + 1$ 이하임을 증명하였다. 하이퍼큐브 Q_m의 고장 지름은 $m + 1$이라고 알려져 있다 [6].

정리 7 *$G(2^m, 2)$에 있는 서로 다른 두 노드 사이에 다음 조건을 만족하는 $\kappa(G)$개의 서로소인 경로가 존재한다.*
(a) 각 경로의 길이는 $dia(G) + 2$ 이하이다.
(b) 최소한 $\lfloor \delta(G)/4 \rfloor$개의 경로의 길이는 $dia(G)$ 이하이다.

$G(2^3, 2)$에서는 Δ_2가 1이고, $G(2^4, 2)$에서는 $\Delta_2 = 2$이다.

따름정리 2 *$G(2^m, 2)$의 고장 지름은 $dia(G) + 2$ 이하이며 persistence는 $\lfloor \delta(G)/4 \rfloor$ 이상이다.*

4 결론

$G(2^m, 2^k)$의 persistence는 이 논문에서 분석된 것보다 크게 개선될 가능성이 있다. 왜냐하면 여기서는 서로소인 경로 각각의 길이가 $dia(G) + \Delta_2$ 이하이면서 그 중에 길이가 지름 이하인 것을 계산한 것인데, persistence를 분석하기 위해서 이러한 조건을 만족할 필요가 없기 때문이다.

참조 서적

[1] 김 희철, 김 상범, 좌 경룡, "재귀원형군의 고장 지름," *한국정보과학회 가을 학술발표회* **21(2)**, pp. 663-666, 1994.

[2] 정 성우, 김 숙연, 박 정흠, 좌 경룡, "Recursive circulant 그래프의 연결도," *한국정보과학회 봄 학술발표회* **19(1)**, pp. 591-594, 1992.

[3] F. T. Boesch, F. Harary, and J. A. Kabell, "Graphs as models of communication network vulnerability: connectivity and persistence," *Networks* **11**, pp. 57-63, 1981.

[4] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, 5th printing, American Elsevier Publishing Co., Inc., 1976.

[5] G. Exoo, "On a measure of communication network vulnerability," *Networks* **12**, pp. 405-409, 1982.

[6] M. S. Krishnamoorthy and B. Krishnamurthy, "Fault diameter of interconnection networks," *Comput. Math. Applic.* **13(5/6)**, pp. 577-582, 1987.

[7] J.-H. Park and K.-Y. Chwa, "Recursive circulant: a new topology for multicomputer networks," *IEEE ISPAN'94*, Kanazawa, Japan, pp. 73-80, 1994.

[8] Y. Saad and M. H. Schultz, "Topological properties of hypercubes," *IEEE Trans. Comput.* **37**, pp. 867-872, 1988.