

# 이분 그래프인 이중 루프 네트워크의 고장 해밀톤 성질\*

박 정흠

가톨릭대학교 컴퓨터정보공학부  
420-743 경기도 부천시 원미구 역곡 2동 산 43-1  
j.h.park@catholic.ac.kr  
전화 (032) 340-3366, 팩스 (032) 340-3777

## Fault-Hamiltonicity of Bipartite Double Loop Networks

Jung-Heum Park

School of Computer Science and Information Engineering  
The Catholic University of Korea  
Yokkok 2-dong 43-1, Wonmi-gu, Puchon City, Kyonggi-do 420-743  
j.h.park@catholic.ac.kr  
TEL (032) 340-3366, FAX (032) 340-3777

---

\* 본 연구는 2002년도 가톨릭대학교 교비연구비의 지원으로 이루어졌음.

# 이분 그래프인 이중 루프 네트워크의 고장 해밀톤 성질

## Fault-Hamiltonicity of Bipartite Double Loop Networks

### 요약

이 논문에서는 정점이나 에지 고장이 있는 이중 루프 네트워크에서 임의의 두 정점을 연결하는 고장 없는 최장 경로를 고찰하여, 고장인 요소의 수가 둘 혹은 그 이하인 경우 이분 그래프인 이중 루프 네트워크  $G(mn;1,m)$ 은 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보인다.  $G(mn;1,m)$ 은  $m$ 이 홀수이고  $n$ 이 짝수일 경우에만 이분 그래프이다.

키워드: 해밀톤 laceable, 고장 감내, 상호 연결망, 최장 경로, circulant 그래프

### Abstract

In this paper, we investigate the longest fault-free paths joining every pair of vertices in a double loop network with faulty vertices and/or edges, and show that a bipartite double loop network  $G(mn;1,m)$  is strongly hamiltonian-laceable when the number of faulty elements is two or less.  $G(mn;1,m)$  is bipartite if and only if  $m$  is odd and  $n$  is even.

**Key words:** Hamiltonian-laceable, fault tolerance, interconnection networks, longest paths, circulant graphs

# 1 서론

고장이 있는 연결망 그래프(interconnection graph)에 선형 배열(linear array)과 링(ring)을 임베딩(embedding)하는 것은 병렬 처리에서 중요한 이슈의 하나이다. 그것은 정점이나 에지에 고장이 있는 그래프에서 길이가 가장 긴 경로와 사이클을 찾는 문제로 모델된다. 문헌에는 여러 다양한 연결망 그래프의 고장 해밀톤 성질이 연구되어 있다[7-8,10].

이중 루프 네트워크  $G(Na_1, a_2)$ 는 다음과 같이 정의되는 분지수가 4인 (무향) 그래프이다: 정점의 집합  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{N-1}\}$ , 에지 집합  $E = \{(v_s, v_t) \mid s + a_i \equiv t \pmod{N}\}$ 을 만족하는  $i (1 \leq i \leq 2)$ 가 존재한다}.  $G(Na_1, a_2)$ 는  $N$ 개의 정점과 크기가 각각  $a_1, a_2$ 인 두 개의 점프를 가지는 circulant 그래프라고 정의할 수 있다. 이중 루프 네트워크는  $\phi_k(v_i) = v_{i+k \pmod{N}}$ 인 동형 사상(automorphism)  $\phi_k$ 와  $\psi_k(v_i) = v_{2k-i \pmod{N}}$ 인 동형 사상  $\psi_k$ 를 가진다. 이중 루프 네트워크는 [2,4,8]에서 널리 연구되었다. 앞으로 이 논문에서 이중 루프 네트워크  $G(mn; 1, m)$ 을  $m \times n$  DLN이라고 쓰기로 한다.  $m \times n$  DLN은  $m$ 이 홀수이고  $n$ 이 짝수일 경우에만 이분 그래프(bipartite graph)이다.

$m \times n$  DLN은 해밀톤 분할(hamiltonian decomposition)이 가능하다. 즉, 그것을 두 개의 에지가 서로소인 해밀톤 사이클로 분할할 수 있다[3]. 더구나 이분 그래프가 아닌  $m \times n$  DLN은 1-고장 해밀톤 연결된 그래프이며 2-고장 해밀톤 그래프임이 증명되어 있다 [5,9]. 즉,  $m \times n$  DLN -  $F$ 는  $|F| \leq 1$ 인 임의의 고장 요소 집합  $F$ 에 대해서 임의의 두 정점을 잇는 해밀톤 경로를 갖고,  $|F| \leq 2$ 인 임의의 고장 요소 집합  $F$ 에 대해서 해밀톤 사이클을 갖는다.

$G$ 를 이분 그래프라 하고,  $B$ 와  $W$ 를 각각  $G$ 의 검정 정점과 흰색 정점 집합이라고 하자.  $G$ 에 있는 고장 정점과 고장 에지의 집합을 각각  $F_v, F_e$ 라고 표기하자.  $F = F_v \cup F_e$ ,  $f_v = |F_v|$ ,  $f_e = |F_e|$ ,  $f = |F|$ 이라고 두자. 고장이 아닌 검정 정점과 흰색 정점의 수를 각각  $n_b, n_w$ 라고 하자.  $n_b = n_w$ 일 때, 서로 다른 색을 가진 두 정점을 잇는 길이가  $2n_b - 1$ 인 고장 없는 경로를  $L^{opt}$ -경로라고 한다. 같은 색을 가진 두 정점에 대해서는 길이가  $2n_b - 2$ 인 고장 없는 경로를  $L^{opt}$ -경로라고 한다.  $n_b > n_w$ 일 때, 두 검정 정점 사이에 길이  $2n_w$ 인 고장 없는 경로, 서로 다른 색을 가진 두 정점 사이에 길이  $2n_w - 1$ 인 고장 없는 경로, 두 흰색 정점 사이에 길이  $2n_w - 2$ 인 고장 없는 경로를  $L^{opt}$ -경로라고 한다.  $n_w > n_b$ 인 경우에도 이와 유사하게  $L^{opt}$ -경로를 정의할 수 있다. 길이  $2 \min\{n_b, n_w\}$ 인 고장 없는 사이클을  $L^{opt}$ -사이클이라고 부른다.  $L^{opt}$ -경로와  $L^{opt}$ -사이클의 길이는 고장 없는 경로와 사이클 중 그 길이가 최대이다.

임의의 두 정점 사이에  $L^{\text{opt}}$ -경로를 가지는 이분 그래프를 *강한 해밀톤 laceable* (*strongly hamiltonian-laceable*) *그래프*라고 말한다.  $|F| \leq k$ 인 임의의 고장 집합  $F$ 에 대해서, 고장이 아닌 임의의 두 정점 사이에  $L^{\text{opt}}$ -경로를 가지는 이분 그래프  $G$ 를  $k$ -고장 *강한 해밀톤 laceable* *그래프*라고 말한다. 이 논문에서는 이분 그래프인  $m \times n$  DLN,  $m \geq 3$ 인 홀수,  $n \geq 4$ 인 짝수는 2-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보인다. 고장 요소의 수의 상한값 2는,  $m \times n$  DLN이 임의의  $k \geq 3$ 에 대해서  $k$ -고장 강한 해밀톤 그래프가 아니라는 의미에서, 최적이다. 고장 요소를 가진  $P_m$ 과  $C_n$ 의 그래프 곱  $P_m \times C_n$ 은  $m \times n$  DLN이 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 밝히는데 중요한 역할을 한다.  $3 \times n$  DLN에서 설계한  $L^{\text{opt}}$ -경로를 기반으로  $m \times n$  DLN의  $L^{\text{opt}}$ -경로를 재귀적으로 설계하기로 한다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서는 몇몇 정의와 표기법을 그리고  $P_m \times P_n$ 과  $P_m \times C_n$ 의 고장 해밀톤 성질을 다룬다. 고장이 있는  $m \times n$  DLN이 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 3절에서 증명하고, 4절에서 결론을 맺기로 한다.

## 2 정의와 표기법

$m \times n$  DLN의 정점 집합  $V$ 는  $\{v_j^i \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ 이고, 에지 집합은  $E = E_r \cup E_r' \cup E_c \cup E_c'$ 이다. 여기서  $E_r = \{(v_j^i, v_{j+1}^i) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j < n\}$ ,  $E_r' = \{(v_n^i, v_1^i) \mid 1 \leq i \leq m\}$ ,  $E_c = \{(v_j^i, v_j^{i+1}) \mid 1 \leq i < m, 1 \leq j \leq n\}$ ,  $E_c' = \{(v_j^1, v_j^m) \mid 1 \leq j < n\} \cup \{(v_n^1, v_n^m)\}$ 이다.  $m \times n$  DLN의 예가 아래 그림 1에 있다.  $E_r \cup E_r'$ 에 속한 에지를 *가로 에지*,  $E_c \cup E_c'$ 에 속한 에지를 *세로 에지*, 그리고  $E_r' \cup E_c'$ 에 속한 에지를 *랩어라운드 (wraparound) 에지*라고 부른다. 세로 에지와 가로 에지의 점프 크기는 각각 1과  $m$ 임을 관찰할 수 있다.

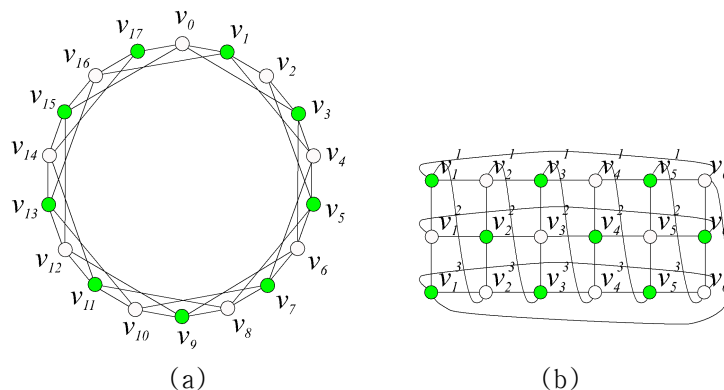


그림 1.  $3 \times 6$  DLN, 혹은 다른 표기로  $G(18;1,3)$

$R(i)$ 와  $C(j)$ 를 각각 행  $i$ 와 열  $j$ 에 있는 정점들의 집합이라고 하자. 즉,  $R(i) = \{v_j^i \mid 1 \leq j \leq n\}$ 이고,  $C(j) = \{v_j^i \mid 1 \leq i \leq m\}$ 이다.  $R(i, i')$ 을  $i \leq i'$ 이면  $\bigcup_{i \leq k \leq i'} R(k)$ 이고, 그렇지 않으면 공집합이라고 두자. 이와 유사하게  $C(j, j')$ 는  $j \leq j'$ 이면  $\bigcup_{j \leq k \leq j'} C(k)$ 이고, 그렇지 않으면 공집합이다.  $v_j^i$ 는  $i+j$ 가 짝수이면 *검정 정점*, 그렇지 않으면 *흰색 정점*이라고 부르기로 한다.  $m \times n$  DLN은 정점 대칭이고 에지 대칭은 아니다. 그렇지만, 한 쌍의 가로 에지  $(v, w)$ 와  $(v', w')$ 은 similar하다, 즉  $\phi(v) = v'$ 이고  $\phi(w) = w'$ 인 동형 사상  $\phi$ 가 존재한다. 한 쌍의 세로 에지도 similar하다.

$G \langle X \rangle - F$ 에서 한 쌍의 정점  $v$ 와  $w$ 를 잇는  $L^{\text{opt}}$ -경로와 해밀톤 경로를, 만약 존재한다면, 각각  $L^{\text{opt}}[v, wX]$ 와  $H[v, wX]$ 로 나타내기로 한다. 여기서  $G \langle X \rangle$ 는 정점의 부분 집합  $X$ 로 유도된(induced)  $G$ 의 부그래프를 말한다. 경로는 정점의 열로 표현한다. 만약  $G \langle X \rangle - F$ 가 정점을 하나도 가지지 않거나 혹은  $v$ 와  $w$  사이에  $L^{\text{opt}}$ -경로나 해밀톤 경로가 존재하지 않는다면,  $L^{\text{opt}}[v, wX]$ 와  $H[v, wX]$ 은 원소의 수가 0인 열이 된다.  $P$ 와  $Q$ 를 각각  $G$ 에 있는 두 서로소인 경로  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ 와  $(b_1, b_2, \dots, b_l)$ 이라고 하고,  $(a_i, b_1)$ 과  $(a_{i+1}, b_l)$ 이  $G$ 의 에지라고 하자. 에지  $(a_i, a_{i+1})$ 을  $(a_i, b_1)$ 과  $(a_{i+1}, b_l)$ 로 교체하면,  $P$ 와  $Q$ 는 합쳐져서 하나의 경로  $(a_1, a_2, \dots, a_i, b_1, b_2, \dots, b_l, a_{i+1}, \dots, a_k)$ 를 이루게 된다. 이와 같은 교체를  $P$ 와  $Q$ 의  $(a_i, b_1)$ 과  $(a_{i+1}, b_l)$ 에 대한 *병합*이라고 부른다.  $P$ 가 닫힌 경로 즉 사이클이면, 병합 연산은 하나의 사이클을 만든다.

$m \times n$  DLN은 사각 그리드(rectangular grid)  $P_m \times P_n$ 과  $P_m \times C_n$ 을 스패닝 부그래프(spanning subgraph)로 가진다. 사각 그리드와  $P_m \times C_n$ 의 해밀톤 성질은 각각 [1]과 [6]에서 연구되었다. 사각 그리드에서 분지수가 2인 정점을 꼭지 정점이라고 한다. 이분 그래프가  $f = f_v \leq k$ 일 때 (혹은  $f_v \leq k$ 이고  $f_e \leq k'$ 일 때)  $L^{\text{opt}}$ -사이클을 가지면,  $k$ -정점-고장 (혹은  $k$ -정점  $k'$ -에지-고장)  $L^{\text{opt}}$ -사이클을 갖는다고 말한다.

**보조정리 1** [1]  $G$ 를 사각 그리드  $P_m \times P_n$ ,  $m, n \geq 2$ 이라고 하자.

- (a)  $nm$ 이 짝수일 때,  $G$ 는 임의의 꼭지 정점  $v$ 로부터  $v$ 와 다른 색을 가진 임의의 정점까지 해밀톤 경로를 갖는다.
- (b)  $nm$ 이 홀수일 때,  $G$ 는 임의의 꼭지 정점  $v$ 로부터  $v$ 와 같은 색을 가진 임의의 정점까지 해밀톤 경로를 갖는다.

**보조정리 2** [6]  $G$ 를  $P_m \times C_n$ ,  $m \geq 2$ ,  $n \geq 4$ 인 짝수라고 하자.

- (a)  $G$ 는 1-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프이다.
- (b)  $G$ 는 2-정점-고장  $L^{\text{opt}}$ -사이클을 갖는다.

- (c)  $G$ 는 1-정점 1-에지-고장  $L^{\text{opt}}$ -사이클을 갖는다.  
 (d)  $G$ 가 둘 이하의 고장 에지를 가질 때, 길이가  $mm-2$  이상인 사이클을 갖는다.

이제  $P_m \times C_n$ 에 있는 두개의 서로소인 경로에 대해서 논의하고자 한다.  $V(P)$ 를 경로  $P$ 에 있는 정점의 집합이라고 하자.  $v-w$  경로는  $v$ 와  $w$ 를 잇는 경로를 말한다.  $\{v, v'\}$ 과  $\{w, w'\}$ 을 잇는 두 경로라는 것은  $v-w$  경로와  $v'-w'$  경로이거나 혹은  $v-w'$  경로와  $v'-w$  경로를 말한다. 그래프  $G$ 의 두 경로  $P_1$ 과  $P_2$ 가 서로소라는 것은  $V(P_1) \cap V(P_2) = \emptyset$ 라는 것을 말하고, 커버 경로라는 것은  $V(P_1) \cup V(P_2) = V(G)$ 라는 것이다. 여기서  $V(G)$ 는  $G$ 의 정점 집합이다.

**보조정리 3** 임의의 서로 다른 검정 정점  $b_1, b_2$ 와 서로 다른 흰색 정점  $w_1, w_2$ 에 대해서  $P_m \times C_n$ ,  $m=2, n \geq 4$  짝수는  $\{b_1, b_2\}$ 와  $\{w_1, w_2\}$ 를 잇는 두 개의 서로소인 커버 경로를 갖는다.

**증명**  $U = \{b_1, b_2, w_1, w_2\}$ ,  $b_1 = v_i^x, b_2 = v_{i'}^{x'}, w_1 = v_j^y, w_2 = v_{j'}^{y'}$ 이라고 두자. 먼저 어떤  $C(k)$ 가  $U$ 에 있는 둘 이상의 정점을 포함할 때를 고려한다. 일반성을 잃지 않고  $k=n$ ,  $w_1 = v_n^y, b_1 = v_n^x$ 이라고 가정한다.  $k' = \max\{i', j'\}$ 이라고 둔다.  $P_1 = H[b_1, w_1 | C(k'+1, n)]$ 과  $P_2 = H[b_2, w_2 | C(1, k')]$ 은 서로소인 커버 경로이다.  $P_1$ 과  $P_2$ 의 존재는 보조정리 1 (a)에 근거한다. 이제 어떤  $C(k)$ 도  $U$ 의 정점을 둘 이상 포함하지 않는 경우를 고려한다. 대칭적인 것을 제외하면 두 경우가 있다.  $i < j < i' < j'$ 일 때  $P_1 = H[b_1, w_1 | C(i, i'-1)]$ ,  $P_2 = H[b_2, w_2 | C(i', n) \cup C(1, i-1)]$ 이다.  $i < j < j' < i'$ 일 때  $P_1 = H[b_1, w_1 | C(i, j'-1)]$ ,  $P_2 = H[b_2, w_2 | C(j', n) \cup C(1, i-1)]$ 이다.  $\square$

**주의** 보조정리 3은  $m \geq 3$ 인 경우로 확장할 수 있다. 만약  $P_1$ 과  $P_2$ 를  $b_1-w_1$  경로와  $b_2-w_2$  경로로 제한한다면 보조정리 3은 성립하지 않는다. 예를 들면  $P_2 \times C_6$ 은  $P_1$ 이  $v_2^y-v_5^y$  경로이고  $P_2$ 가  $v_4^y-v_1^y$  경로인 서로소인 커버 경로를 가지지 않는다.

### 3 둘 이하의 고장인 요소를 갖는 $m \times n$ DLN

이 절에서는 고장이 둘 이하인  $3 \times n$  DLN이 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 밝힌 다음  $m \times n$  DLN,  $m \geq 5$ 를 고찰하기로 한다.  $F_l$ 을 다음과 같이 정의되는  $l$ 개의 정점을 가진 그래프라고 하자: 정점 집합  $V = \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ 이고 에지 집합  $E = \{(w_i, w_j) \mid j = i+1 \text{ 혹은 } j = i+3 \text{ 이다}\}$ .  $F_l$ 은 이분 그래프이다. 정점  $w_i$ 는  $i$ 가 홀수이면 검정 정점, 짝수이면 흰색 정점이라고 부른다.

**보조정리 4**  $F_l, l \geq 2$ 는 강한 해밀톤 laceable 그래프이다. 더구나 임의의 정점쌍  $s, t$ 를 잇는 아래의 조건을 만족하는  $L^{\text{opt}}$ -경로  $P$ 가 존재한다: (a)  $l \geq 3$  홀수이고  $s, t$ 가 검정 정점일 때,  $P$ 는 에지  $(w_1, w_2)$ 와  $(w_{l-1}, w_l)$ 을 모두 지나며, (b)  $l \geq 4$  짝수이고  $s, t$ 가 서로 다른 색을 가질 때,  $(s, t) = (w_{l-1}, w_l)$ 가 아니면  $P$ 는 모두  $(w_{l-1}, w_l)$ 을 지나고, 그렇지 않으면  $(w_{l-2}, w_{l-1})$ 을 지난다.

**증명**  $l$ 에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다.  $l \leq 4$ 일 때 보조정리는 성립하므로  $l \geq 5$ 를 가정한다.  $Y = \{w_{l-1}, w_l\}$ ,  $X = V \setminus Y$ 라고 둔다.

**경우 1**  $l$  홀수. 만약  $s, t$ 가 서로 다른 색을 가지고 있으면, 일반성을 잃지 않고  $s, t \neq w_l$ 을 가정하면  $P = L^{\text{opt}}[s, t \setminus w_l]$ 이다.  $s, t$ 가 흰색 정점일 때  $P = L^{\text{opt}}[s, t \setminus w_1, w_l]$ 이다.  $s, t$ 가 검정 정점일 때,  $s, t \in X$ 이면  $P$ 는  $L^{\text{opt}}[s, t \setminus X]$ 와  $(w_{l-1}, w_l)$ 의  $(w_{l-3}, w_l)$ ,  $(w_{l-2}, w_{l-1})$ 에 대한 병합으로 얻을 수 있다. 그렇지 않으면  $t = w_l$ 이라 가정하면,  $P = (L^{\text{opt}}[s, s \setminus X], w_{l-1}, t)$ 이다. 여기서  $s'$ 은  $s' \neq s$ 인  $w_{l-2}$ 이거나  $w_{l-4}$ 이다.

**경우 2**  $l$  짝수.  $s, t$ 가 검정 정점이면  $P = L^{\text{opt}}[s, t \setminus w_l]$ 이다.  $s, t$ 가 흰색 정점이면  $P = L^{\text{opt}}[s, t \setminus w_1]$ 이다. 남은 경우를 위해서  $s$ 는 검정,  $t$ 는 흰색 정점이라고 가정한다.  $s, t \in X$ 이면  $P$ 는  $(s, t) = (w_{l-3}, w_{l-2})$ 이냐 아니냐에 따라서  $L^{\text{opt}}[s, t \setminus X]$ 와  $(w_{l-1}, w_l)$ 의  $(w_{l-4}, w_{l-1})$ ,  $(w_{l-3}, w_l)$ 이나 혹은  $(w_{l-3}, w_l)$ ,  $(w_{l-2}, w_{l-1})$ 에 대한 병합으로 얻을 수 있다.  $s, t \in Y$ 이면  $P = (s, w_{l-2}, L^{\text{opt}}[w_{l-2}, w_{l-3} \setminus X], t)$ 이다.  $s \in X, t \in Y$ 이면  $P = (L^{\text{opt}}[s, w_{l-2} \setminus X], w_{l-1}, t)$ 이다.  $s \in Y, t \in X$ 이면  $P = (s, w_l, L^{\text{opt}}[w_{l-3}, t \setminus X])$ 이다. □

이 절에서  $3 \times n$  DLN의 정점들은  $v_j, 0 \leq j < N$ 으로 나타낸다. 여기서  $N = 3n$ 이다. 정점  $v_j$ 는  $j$ 가 짝수일 때 흰색 정점, 홀수일 때 검정 정점이라고 한다.  $3 \times n$  DLN에서 가로 에지의 점프 크기는 3임에 유의한다.

**보조정리 5** 고장인 정점을 둘 가진  $3 \times n$  DLN,  $n \geq 4$  짝수는 강한 해밀톤 laceable 그래프이다.

**증명** 일반성을 잃지 않고  $v_0$ 가 고장이라고 가정한다.  $v_0$ 가 아닌 다른 고장 정점을  $v_r$ 이라고 하고,  $X = \{v_1, v_2, \dots, v_{r-1}\}$ ,  $Y = \{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_{N-1}\}$ 이라고 둔다.  $G \setminus X$ 와

$G\langle Y \rangle$ 는 각각  $F_{|X|}$ ,  $F_{|Y|}$ 와 동형인 스페닝 부그래프를 가짐에 유의한다. 임의의 고장이 아닌 두 정점  $s, t$  사이에  $L^{\text{opt}}$ -경로를 설계하기로 한다.

*경우 1*  $v_r$ 은 흰색 정점.  $|X|=1$ 일 때,  $s, t \in Y$ 인 경우  $P = L^{\text{opt}}[s, \mathcal{d}Y]$ 이고,  $s = v_1$ 인 경우  $P = (s, L^{\text{opt}}[s', \mathcal{d}Y])$ 이다. 여기서  $s'$ 은  $Y$ 에 속한 정점으로  $s$ 에 인접하고  $s' \neq t$ 이다. 대칭적으로  $|Y|=1$ 인 경우도 처리된다. 이제  $|X|, |Y| \geq 3$ 이라고 가정한다.  $s, t \in X$ 인 경우를 고려하자.  $s, t \in B$ 일 때,  $P$ 는 (에지  $(v_{r-2}, v_{r-1})$ 을 지나는)  $L^{\text{opt}}[s, \mathcal{d}X]$ 와  $L^{\text{opt}}[v_{r+1}, v_{r+2}|Y]$ 의  $(v_{r-2}, v_{r+1})$ ,  $(v_{r-1}, v_{r+2})$ 에 대한 병합으로 얻을 수 있다.  $s \in B$ ,  $t \in W$ 일 때 일반성을 잃지 않고  $s \neq v_1$ 라고 가정하고,  $\{s, t\} \neq \{v_{r-2}, v_{r-1}\}$ 인 경우에  $P$ 는  $L^{\text{opt}}[s, \mathcal{d}X \setminus v_1]$ 와  $L^{\text{opt}}[v_{r+1}, v_{r+2}|Y]$ 의  $(v_{r-2}, v_{r+1})$ ,  $(v_{r-1}, v_{r+2})$ 에 대한 병합으로 얻을 수 있고, 그렇지 않은 경우  $P = (v_{r-2}, v_{r-3}, \dots, v_2, v_{N-1}, v_{N-2}, \dots, v_{r+2}, v_{r-1})$ 이다.  $s, t \in W$ 일 때  $s = v_i$ ,  $t = v_j$ ,  $i < j$ 이라고 가정하면,  $P = (s = v_i, v_{i-1}, \dots, v_1, v_{N-2}, v_{N-3}, \dots, v_{r+2}, L^{\text{opt}}[v_{r-1}, \mathcal{d}\{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{r-1}\}])$ 이다. 대칭적으로  $s, t \in Y$ 인 경우도 처리할 수 있다. 이제  $s \in X$ ,  $t \in Y$ 인 경우를 고려한다.  $s, t \in B$ 일 때  $P = (L^{\text{opt}}[s, \mathcal{d}X], L^{\text{opt}}[t', \mathcal{d}Y])$ 이다. 여기서  $s \neq v_1$ 이면  $(s', t') = (v_1, v_{N-2})$ 이고 그렇지 않으면  $(s', t') = (v_{r-1}, v_{r+2})$ 이다.  $s \in B$ ,  $t \in W$ 일 때  $P = (L^{\text{opt}}[s, v_2|X], L^{\text{opt}}[v_{N-1}, \mathcal{d}Y])$ 이다. 대칭적으로  $s \in W$ ,  $t \in B$ 인 경우는 처리된다.  $s, t \in W$ 일 때  $P = (L^{\text{opt}}[s, \mathcal{d}X], L^{\text{opt}}[t', \mathcal{d}Y])$ 이다. 여기서  $t \neq v_{N-2}$ 인 경우  $(s', t') = (v_1, v_{N-2})$ 이고 그렇지 않으면  $(s', t') = (v_{r-1}, v_{r+2})$ 이다.

*경우 2*  $v_r$ 은 검정 정점.  $X = \emptyset$ 이거나  $Y = \emptyset$ 이면, 보조정리 4에 의해서 성립한다. 이제  $|X|, |Y| \geq 2$ 이다.  $s, t \in X$ 인 경우를 먼저 고려한다.  $s \in B$ ,  $t \in W$ 일 때  $(s, t) \neq (v_{r-2}, v_{r-1})$ 인 경우에  $P$ 는  $L^{\text{opt}}[s, \mathcal{d}X]$ 와  $L^{\text{opt}}[v_{r+1}, v_{r+2}|Y]$ 의  $(v_{r-2}, v_{r+1})$ ,  $(v_{r-1}, v_{r+2})$ 에 대한 병합으로 얻는다. 그렇지 않은 경우에  $P = (v_{r-2}, v_{r-3}, \dots, v_1, L^{\text{opt}}[v_{N-2}, v_{r+2}|Y], v_{r-1})$ 이다. 대칭적으로  $s \in W$ ,  $t \in B$ 일 때는 처리된다.  $s, t \in B$ 일 때  $P$ 는  $L^{\text{opt}}[s, \mathcal{d}X \setminus v_{r-1}]$ 과  $L^{\text{opt}}[v_{N-2}, v_{N-1}|Y]$ 의  $(v_1, v_{N-2})$ ,  $(v_2, v_{N-1})$ 에 대한 병합으로 얻는다. 대칭적으로  $s, t \in W$ 인 경우도 처리된다.  $s, t \in Y$ 인 경우는  $s, t \in X$ 인 경우와 대칭이다. 이제  $s \in X$ ,  $t \in Y$ 임을 가정한다.  $s \in B$ ,  $t \in W$ 일 때  $P = (L^{\text{opt}}[s, v_{r-1}|X], L^{\text{opt}}[v_{r+2}, \mathcal{d}Y])$ 이다. 대칭적으로  $s \in W$ ,  $t \in B$ 인 경우도 처리된다.  $s, t \in B$ 일 때,  $P = (L^{\text{opt}}[s, \mathcal{d}X], L^{\text{opt}}[t', \mathcal{d}Y])$ 이다. 여기서  $t \neq v_{N-1}$ 이면  $(s', t') = (v_2, v_{N-1})$ 이고 그렇지 않으면  $(s', t') = (v_{r-1}, v_{r+2})$ 이다. 대칭적으로  $s, t \in W$ 인 경우도 처리된다.  $\square$

**보조정리 6** 고장 정점 하나와 고장 가로 에지 하나를 가진  $3 \times n$  DLN,  $n \geq 4$  짝수는 강한



해밀톤 laceable 그래프이다.

**증명** 일반성을 잃지 않고  $v_0$ 와  $(x, y)$ 가 고장이며  $x$ 는 검정 정점이라고 가정한다.  $s, t \in W$ 이거나 혹은  $x \neq s \in B$ 이고  $t \in W$ 일 때는 ( $v_0$ 와 함께)  $x$ 를 고장 정점으로 간주하고 보조정리 5를 이용하여  $L^{\text{opt}}$ -경로  $P$ 를 찾을 수 있다. 만약  $(x, y)$ 가  $\{(v_{N-3}, v_0), (v_{N-2}, v_1), (v_{N-1}, v_2), (v_0, v_3)\}$ 에 속한 에지라면 고장이 없고  $F_{N-1}$ 과 동형인 스페닝 부그래프를 가지므로 보조정리가 성립한다. 대칭성에 의해서  $x = v_r, y = v_{r+3}, 1 \leq r \leq N-4$ 이라고 가정한다.  $X = \{v_1, v_2, \dots, v_{r+1}\}, Y = \{v_{r+2}, v_{r+3}, \dots, v_{N-1}\}$ 이라고 둔다.  $|X|$ 는 짝수이고  $|X|, |Y| \geq 2$ 이며  $G \langle X \rangle$ 와  $G \langle Y \rangle$ 는 각각  $F_{|X|}, F_{|Y|}$ 와 동형임에 유의한다.  $s = x, t \in W$ 일 때,  $t \in X, t \neq v_{r+1}$ 인 경우  $P = (v_r, v_{r+1}, \dots, v_{N-2}, L^{\text{opt}}[v_1, \delta X \setminus v_r, v_{r+1}])$ 이고,  $t = v_{r+1}$ 인 경우  $P = (v_r, v_{r-1}, \dots, v_1, v_{N-2}, v_{N-3}, \dots, v_{r+2}, v_{r+1})$ 이며,  $t \in Y$ 인 경우  $P = (L^{\text{opt}}[s, v_{r+1} | X], L^{\text{opt}}[v_{r+2}, \delta Y])$ 이다. 이제  $s, t \in B$ 인 마지막 경우를 고려한다.  $s, t \in X$ 일 때  $s = v_i, t = v_j, i < j$ 이라고 가정하면,  $P = (L^{\text{opt}}[s, v_2 | X_1], v_{N-1}, v_{N-2}, \dots, v_{r+2}, L^{\text{opt}}[v_{r+1}, \delta X_2])$ 이다. 여기서  $X_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_{j-1}\}, X_2 = X \setminus X_1$ 이다.  $s, t \in Y$ 일 때  $P$ 는  $L^{\text{opt}}[s, \delta Y]$ 와  $L^{\text{opt}}[v_1, v_2 | X]$ 의  $(v_{N-2}, v_1), (v_{N-1}, v_2)$ 에 대한 병합으로 얻는다.  $s \in X, t \in Y$ 일 때  $P = (L^{\text{opt}}[s, v_{r+1} | X], L^{\text{opt}}[t', \delta Y])$ 이다. 여기서  $t \neq v_{r+2}$ 이면  $t' = v_{r+2}$ 이고 그렇지 않으면  $t' = v_{r+4}$ 이다.  $\square$

**보조정리 7** 고장 가로 에지 둘을 가진  $3 \times n$  DLN,  $n \geq 4$  짝수는 강한 해밀톤 laceable 그래프이다.

**증명** 일반성을 잃지 않고  $(v_{N-2}, v_1)$ 을 고장이라고 가정한다.  $s, t \in B$ 일 때 (혹은  $s, t \in W$ 일 때)  $v_{N-2}$ 를 (혹은  $v_1$ 을) 고장 정점이라고 간주하고 보조정리 6을 적용하여  $L^{\text{opt}}$ -경로  $P$ 를 설계할 수 있다. 이제  $s \in B, t \in W$ 인 경우를 고려한다. 만약  $\{(v_{N-4}, v_{N-1}), (v_{N-3}, v_0), (v_{N-1}, v_2), (v_0, v_3)\}$ 에 고장 에지가 존재한다면 고장이 없고  $F_N$ 과 동형인 스페닝 부그래프가 존재하므로 보조정리가 성립한다.  $(v_r, v_{r+3}), 1 \leq r \leq N-5$ 을  $(v_{N-2}, v_1)$ 과 다른 고장 에지라고 둔다.  $r$ 이 홀수이면  $X = \{v_0, v_1, \dots, v_r\}$  그렇지 않으면  $X = \{v_0, v_1, \dots, v_{r+1}\}$ 이라고 두고,  $Y = V \setminus X$ 라고 둔다.  $|X|, |Y|$ 는 짝수이며  $|X|, |Y| \geq 2$ 임에 유의한다.  $s, t \in X$ 일 때,  $s = v_i, t = v_j, h = \max\{i, j\}$ , 그리고  $X_1 = \{v_0, v_1, \dots, v_{h-1}\}$ 라고 두면,  $P = (v_h, v_{h+1}, \dots, v_{N-1}, L^{\text{opt}}[s', \delta X_1])$ 이다. 여기서  $|X_1| = 1$ 이거나 혹은  $|X_1| \geq 2$ 이고  $s \neq v_0$ 이면  $s' = v_0$ 이고 그렇지 않으면  $s' = v_2$ 이다.  $s, t \in Y$ 인 경우는  $s, t \in X$ 인 경우와 매우 유사하므로, 여기서는 그

설계를 생략한다.  $s \in X$ ,  $t \in Y$ 일 때는  $P = (L^{\text{opt}}[s, v_0|X], L^{\text{opt}}[v_{N-1}, t|Y])$ 이다. 유사하게  $s \in Y$ ,  $t \in X$ 일 때도 설계할 수 있다.  $\square$

**보조정리 8**  $3 \times n$  DLN,  $n \geq 4$  짝수는 2-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프이다.

**증명** 만약 고장인 요소가 하나 이하이거나 혹은 고장인 세로 에지가 있다면  $3 \times n$  DLN은 최대 하나의 고장인 요소를 가지고  $P_3 \times C_n$ 과 동형인 스페닝 부그래프를 가진다. 보조정리 2 (a), 5, 6, 7에 의해서 성립한다.  $\square$

이제  $m \times n$  DLN이 2-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 증명할 준비가 되었다.

**정리 1**  $m \times n$  DLN,  $m \geq 3$  홀수,  $n \geq 4$  짝수는 2-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프이다.

**증명**  $m$ 에 대한 귀납법으로 증명한다. 보조정리 8에 의해서  $m \geq 5$ 임을 가정한다. 만약 하나 이하의 고장 요소를 가지거나 혹은 고장인 세로 에지가 있으면 보조정리 2 (a)에 의해서 임의의 정점쌍  $s, t$ 를 잇는  $L^{\text{opt}}$ -경로를 설계할 수 있다. 따라서 고장인 요소를 다음과 같이 대칭성을 고려하여 네 가지의 고장 유형으로 분류할 수 있다: (T1) 흰색 정점 하나와 검정 정점 하나, (T2) 가로 에지 둘, (T3) 흰색 정점 둘, 그리고 (T4) 흰색 정점 하나와 가로 에지 하나. 고장 유형이 T3이거나 T4인 경우에 모든 고장이 아닌 흰색 정점을 지나는 경로는  $L^{\text{opt}}$ -경로임에 유의한다.  $X = R(1, m-2)$ ,  $Y = R(m-1, m)$ 이라고 둔다. 일반성을 잃지 않고 다음을 가정한다. (A1) 모든 고장인 요소는  $G\langle X \rangle$ 에 속한다. 따라서  $G\langle Y \rangle$ 에는 고장이 없다. (A2) 고장 유형이 T2이고 모든 고장 에지가 하나의 행에 포함된다면, 그것들은 행 2에 포함된다. 그렇지 않다면, 행 1에 고장인 요소가 존재한다. (A3) 고장인 정점이 있다면,  $v_n^1$ 은 고장이다.

**경우 1**  $s, t \in X$ . 귀납적 가설에 의해서  $m-2 \times n$  DLN은  $s, t$  사이에  $L^{\text{opt}}$ -경로  $P'$ 을 가진다.  $P'$ 이  $r > 0$ 개의 세로 렘버라운드 에지  $\{(v_{i_j}^{m-2}, v_{i_{j-1}}^1) | 1 \leq j \leq r\}$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ 을 포함한다면, 모든  $j$ 에 대하여  $P'$ 과  $H[v_{i_j}^{m-1}, v_{i_j}^m | Y_{i_j}]$ 를  $(v_{i_j}^{m-2}, v_{i_j}^{m-1})$ ,  $(v_{i_{j-1}}^1, v_{i_j}^m)$ 에 대하여 연속적으로 병합함으로써  $L^{\text{opt}}$ -경로  $P$ 를 설계할 수 있다. 여기서  $Y_{i_1} = Y \cap (C(1, i_1) \cup C(i_r+1, n))$ 이고  $Y_{i_j} = Y \cap C(i_{j-1}+1, i_j)$ ,  $2 \leq j \leq r$ 이다.  $P'$ 이 세로 렘버라운드 에지를 포함하지 않으면,  $P$ 는  $P'$ 과  $H[x', y' | Y]$ 의  $(x, x')$ ,  $(y, y')$ 에 대한 병합으로 얻는다. 여기서  $(x, y)$ 는 행 1이나  $m-2$ 에 있는  $P'$ 의 가로 에지이며,  $x', y'$ 은 각각  $x, y$ 에 인접한  $Y$ 의 정점이다.

**경우 2**  $s, t \in Y$ . 먼저  $G\langle X \rangle$ 에서  $L^{\text{opt}}$ -사이클  $C$ 를 설계한다. 고장 유형이 T1, T3, T4인 경우는 보조정리 2 (b)와 (c)에 의해서  $C$ 가 존재한다. 고장 유형이 T2인 경우에  $C$

를 설계하기 위해서 다음 주장을 증명하면 충분하다.

**주장 1** 고장 유형이 T2인 경우에  $P_l \times C_n$ ,  $l \geq 3$ 은 가정 A2하에서 해밀톤 사이클을 가진다.

**주장 1의 증명** 같은 행에 두 고장 에지를 포함하는 경우는, 일반성을 잃지 않고  $(v_n^2, v_1^2)$ ,  $(v_i^2, v_{i+1}^2)$ 을 고장이라고 가정하면  $C = (v_1^2, v_2^2, \dots, v_i^2, H[v_i^1, v_{i+1}^1 | R(1)], v_{i+1}^2, v_{i+2}^2, \dots, v_n^2, H[v_n^3, v_1^3 | R(3, l)])$ 이다. 두 고장 에지가 서로 다른 행에 포함되는 경우는, 일반성을 잃지 않고  $(v_n^1, v_1^1)$ ,  $(v_i^1, v_{i+1}^1)$ ,  $x \neq 1$ 을 고장이라고 가정하면  $C = (v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1, H[v_n^2, v_1^2 | R(2, l)])$ 이다. 따라서 주장 1의 증명이 끝났다.

행 1이나  $m-2$ 에 있는  $C$ 의 가로 에지 중에서  $x' \neq s, t$ 이거나 혹은  $y' \neq s, t$ 를 만족하는 에지  $(x, y)$ 를 찾는다. 여기서  $x', y'$ 은 각각  $x, y$ 에 인접한  $Y$ 의 정점이다.  $\{x', y'\} \cap \{s, t\} = \emptyset$ 인 경우를 고려한다.  $(x', y')$ 을 지나고  $s, t$ 를 잇는  $L^{\text{opt}}$ -경로가  $G \langle Y \rangle$ 에 존재함을 주장한다.  $s, t$ 의 색깔에 따라,  $s, t$ 를 잇는 모든  $L^{\text{opt}}$ -경로는 최소한  $x'$ 이나  $y'$ 중 하나를,  $x'$ 이라고 하자, 중간 정점으로 지난다.  $x'$ 에 인접한  $G \langle Y \rangle$ 의 세로 에지  $e_{x'}$ 을 고장 에지로 간주하고 보조정리 2 (a)를 이용하여  $s, t$ 를 잇는  $L^{\text{opt}}$ -경로  $P'$ 을 찾으면  $P'$ 이 바로 원하는  $G \langle Y \rangle$ 의  $L^{\text{opt}}$ -경로가 된다.  $P'$ 과  $C \setminus (x, y)$ 를  $(x', x)$ ,  $(y', y)$ 에 대하여 병합하면 경로  $P$ 를 얻을 수 있다.  $\{x', y'\} \cap \{s, t\} \neq \emptyset$ 인 경우는 일반성을 잃지 않고  $x' = s$ 라고 가정한다.  $s$ 를 고장 정점이라고 간주하고 보조정리 2 (a)를 이용하여  $G \langle Y \rangle$ 에서  $y', t$ 를 잇는  $L^{\text{opt}}$ -경로  $P'$ 을 찾는다. 그러면  $P = (s, C \setminus (x, y), P')$ 이다.

여기서 설계한 경로  $P$ 는 (i) 고장 유형이 T3 혹은 T4이고 (ii)  $s, t$ 가 검정 정점인 경우를 제외하면  $L^{\text{opt}}$ -경로가 된다. 남은 경우에  $L^{\text{opt}}$ -경로  $P$ 를 설계하기 위해서 먼저 다음과 같은 주장을 증명하고자 한다.

**주장 2** 고장 유형이 T3 혹은 T4일 때,  $P_l \times C_n$ ,  $l \geq 3$ 에 있는 임의의 검정 정점  $v$ 에 대하여, 가정 A3하에서  $v$ 와  $R(1)$ 에 있는 어떤 검정 정점  $w$ 를 잇는  $L^{\text{opt}}$ -경로가 존재한다.

**주장 2의 증명**  $z$ 를  $v_n^1$ 이 아닌 고장인 요소라고 하자.  $v_n^1$ 은 고장 정점이고  $z$ 는 흰색 정점이거나 혹은 가로 에지임에 유의한다.  $z$ 가 행  $2, 3, \dots, l$ 에 있을 때,  $z = v_{n-1}^2$ 인 경우는  $z = v_1^2$ 인 경우와 대칭이므로, 일반성을 잃지 않고  $z \neq v_{n-1}^2$ 임을 가정한다. 그러면  $v = v_j^1$ ,  $j \neq 1$ 인 경우  $P = (v_j^1, v_{j+1}^1, \dots, v_{n-1}^1, L^{\text{opt}}[v_{n-1}^2, v_{j-1}^2 | R(2, l)], v_{j-1}^1, v_{j-2}^1, \dots, v_1^1)$ 이고,  $v = v_1^1$ 인 경우  $P = (v_1^1, v_2^1, L^{\text{opt}}[v_2^2, v_{n-1}^2 | R(2, l)], v_{n-1}^1, v_{n-2}^1, \dots, v_3^1)$ 이며,

$v \in R(2, l)$ 인 경우  $P = (L^{\text{opt}}[v, v_{n-1}^2 | R(2, l)], v_{n-1}^1, v_{n-2}^1, \dots, v_1^1)$ 이다. 이제  $z$ 가 행 1에 있는 흰색 정점  $v_i^1$ 일 경우를 고려한다.  $v \in C(1, i-1)$ 일 때,  $i=2$ ,  $v \neq v_1^1$ 인 경우  $P = (H[v, v_n^3 | R(3, l)], v_n^2, H[v_{n-1}^2, v_4^2 | R(1, 2) \cap C(4, n-1)], v_3^2, v_2^2, v_1^2, v_1^1)$ 이고, (i)  $i=2$ 이고  $v = v_1^1$ , (ii)  $i \geq 4$ 이고  $l$  짝수, 혹은 (iii)  $i \geq 4$ ,  $l$  홀수,  $v \neq v_{i-1}^1$ 인 경우  $P = (H[v, v_{i-1}^1 | C(1, i-1)], H[v_i^1, v_n^3 | R(3, l) \cap C(i, n)], v_n^2, H[v_{n-1}^2, v_{n-1}^1 | R(1, 2) \cap C(i+1, n-1)])$ 이며,  $i \geq 4$ ,  $l$  홀수,  $v = v_{i-1}^1$ 인 경우  $P = (v_{i-1}^1, H[v_{i-2}^1, v_{i-2}^1 | C(1, i-2)], v_{i-1}^1, v_{i-1}^2, \dots, v_{i-1}^2, H[v_i^2, v_{i+1}^2 | R(2, l) \cap C(i, n)], v_{i+1}^1, v_{i+2}^1, \dots, v_{n-1}^1)$ 이다. 대칭적으로  $v \in C(i+1, n-1)$ 인 경우도 처리할 수 있다.  $v \in C(i)$ 일 때,  $v = v_i^2$ 인 경우  $P = (v_i^2, v_i^3, \dots, v_i^1, H[v_{i+1}^1, v_{n-2}^1 | C(i+1, n-2)], H[v_{n-1}^1, v_1^2 | R(2, l) \cap (C(n-1, n) \cup C(1, i-1))], v_1^1, v_2^1, \dots, v_{i-1}^1)$ 이고,  $v \neq v_i^2$ 인 경우  $P = (H[v, v_{i-1}^1 | R(4, l)], Q)$ 이다. 여기서,  $Q$ 는  $P_3 \times C_n$ 에서  $v_{i-1}^3$ 과 어떤 검정 정점  $w \in R(1)$ 을 잇는  $L^{\text{opt}}$ -경로이다. 대칭적으로  $v \in C(n)$ 인 경우는 처리된다. 마지막 남은 경우를 위해서 일반성을 잃지 않고  $z = (v_i^1, v_{i+1}^1)$ ,  $l$  홀수라고 가정한다. 만약  $i = n-1$ 이면,  $z$ 는  $v_n^1$ 과 인접하고 따라서 보조정리 2 (a)에 의해서 증명이 끝난다.  $v \in C(1, i)$ 일 때,  $i=1$ 이고  $v \neq v_1^1$ 인 경우  $P = (H[v, v_n^3 | R(3, l)], v_n^2, H[v_{n-1}^2, v_2^2 | R(1, 2) \cap C(2, n-1)], v_1^2, v_1^1)$ 이고, (i)  $i=1$ 이고  $v = v_1^1$ , (ii)  $i \geq 3$ 이고  $l$  짝수, 혹은 (iii)  $i \geq 3$ ,  $l$  홀수,  $v \neq v_i^1$ 인 경우  $P = (H[v, v_i^1 | C(1, i)], H[v_{i+1}^1, v_n^3 | R(3, l) \cap C(i+1, n)], v_n^2, H[v_{n-1}^2, v_{n-1}^1 | R(1, 2) \cap C(i+1, n-1)])$ 이고,  $i \geq 3$ ,  $l$  홀수,  $v = v_i^1$ 인 경우  $P = (v_i^1, v_{i+1}^1, \dots, v_n^1, v_n^1, \dots, v_n^2, H[v_{n-1}^2, v_{i+1}^1 | R(1, l-1) \cap C(i+1, n-1)], v_i^1, v_{i-1}^1, \dots, v_1^1, H[v_{i-1}^1, v_1^1 | C(1, i-1)])$ 이다.  $v \in C(i+1, n-1)$ 일 때,  $l$  홀수인 경우  $P = (H[v, v_{i+1}^1 | C(i+1, n-1)], H[v_i^1, v_1^2 | R(2, l) \cap (C(1, i) \cup C(n))], v_1^1, v_2^1, \dots, v_i^1)$ 이고,  $l$  짝수인 경우  $P = (H[v, v_{n-1}^1 | C(i+1, n-1)], H[v_n^1, v_1^2 | R(2, l) \cap (C(1, i) \cup C(n))], v_1^1, v_2^1, \dots, v_i^1)$ 이다.  $v \in C(n)$ 일 때,  $v = v_n^2$ 인 경우  $P = (v_n^2, v_n^3, \dots, v_n^1, H[v_{n-1}^1, v_{i+1}^1 | C(i+1, n-1)], H[v_i^1, v_1^1 | C(1, i)])$ 이고, 그렇지 않으면  $P = (H[v, v_1^1 | R(4, l)], Q)$ 이다. 여기서  $Q$ 는  $P_3 \times C_n$ 에서  $v_1^3$ 과 어떤 검정 정점  $w \in R(1)$ 을 잇는  $L^{\text{opt}}$ -경로이다. 이것으로 주장 2의 증명이 끝났다.

이제 고장 유형이 T3이거나 혹은 T4이고  $s$ 와  $t$ 가 검정 정점인 남은 경우에  $L^{\text{opt}}$ -경로  $P$ 를 설계한다. 행  $m-2$ 에 있는 임의의 검정 정점을  $x$ 라고 하자. 주장 2를 이용하여  $G \langle X \rangle$ 에서  $x$ 와  $R(1)$ 에 있는 어떤 검정 정점  $y$ 를 잇는  $L^{\text{opt}}$ -경로  $P'$ 을 찾는다.  $x', y'$ 을 각각  $x, y$ 와 인접한  $Y$ 의 정점이라고 두자.  $x', y'$ 은 흰색 정점이고 따라서  $\{s, t\} \cap \{x', y'\} = \emptyset$ 임에 유의한다. 보조정리 3에 의하여  $G \langle Y \rangle$ 는  $\{s, t\}$ 와  $\{x', y'\}$ 을 잇는

두 개의 서로소인 커버 경로  $P_1, P_2$ 를 가진다. 따라서  $L^{\text{opt}}$ -경로  $P = (P_1, P', P_2)$ 가 존재한다.

경우 3  $s \in X, t \in Y$ .  $G \langle R(1, m_1) \rangle$ 이  $s$ 와 모든 고장 요소를 포함하는 최소의 정수를  $m_1$ 이라고 둔다. 고장 유형이 T1, T3, 혹은 T4인 경우  $m' = \max\{m_1, 2\}$ 라고 두고, 그렇지 않으면  $m' = \max\{m_1, 3\}$ 이라고 둔다.  $X' = R(1, m)$ ,  $Y' = V \setminus X'$ 이라고 둔다.

경우 3.1  $s \in R(1) \cup R(m')$ . 고장 유형이 T1, T2이거나 혹은 고장 유형이 T3, T4이고  $s$ 가 흰색 정점인 경우를 고려하자. 주장 1과 보조정리 2 (b)와 (c)에 의해서  $G \langle X' \rangle$ 에는  $L^{\text{opt}}$ -사이클  $C$ 가 존재한다. 더구나  $C$ 는  $s$ 를 지난다.  $(s, s')$ 이  $C$ 의 가로 에지가 되는 정점 하나를  $s'$ 이라고 하고,  $s'$ 에 인접한  $Y'$ 의 정점을  $t'$ 이라고 하자.  $t' \neq t$ 일 때  $L^{\text{opt}}$ -경로  $P = (C \setminus (s, s'), L^{\text{opt}}[t', tY'])$ 이 존재한다.  $t' = t$ 일 때, 행 1이나  $m'$ 에서  $x, y \neq s'$ 을 만족하는  $C$ 의 에지  $(x, y)$ 를 찾는다.  $x', y'$ 을 각각  $x, y$ 에 인접한  $Y'$ 의 정점이라고 둔다.  $t$ 를 고장 정점이라고 간주하고 보조정리 2 (a)를 이용하여  $x', y'$ 을 잇는  $G \langle Y' \rangle$ 의  $L^{\text{opt}}$ -경로  $P_1$ 을 찾는다.  $P' = (C \setminus (s, s'), t)$ 와  $P_1$ 의  $(x, x'), (y, y')$ 에 대한 병합으로  $L^{\text{opt}}$ -경로  $P$ 를 얻는다. 이제 고장 유형이 T3, T4이고  $s$ 가 검정 정점인 경우를 고려한다.  $m' = 2$ 이면  $X'' = X' \cup R(3)$ ,  $Y'' = V \setminus X''$ 이라고 두고, 그렇지 않으면  $X'' = X'$ ,  $Y'' = Y'$ 이라고 둔다. 주장 2에 의해서  $G \langle X'' \rangle$ 에  $s$ 와  $R(1)$ 에 있는 어떤 검정 정점  $s'$ 을 잇는  $L^{\text{opt}}$ -경로  $P'$ 이 존재한다.  $t'$ 을  $s'$ 에 인접한  $Y''$ 의 정점이라고 둔다.  $t' \neq t$ 일 때  $P = (P', L^{\text{opt}}[t', tY''])$ 이다.  $t' = t$ 일 때는 행 1이나  $m'$ 에서  $x, y \neq s'$ 을 만족하는  $P'$ 의 에지  $(x, y)$ 를 찾는다.  $t$ 를 고장 정점이라고 간주하고  $G \langle Y'' \rangle$ 에서  $x', y'$ 을 잇는  $L^{\text{opt}}$ -경로  $P_1$ 을 찾는다. 여기서  $x', y'$ 은 각각  $x, y$ 와 인접한  $Y''$ 의 정점이다.  $P'' = (P', t)$ 와  $P_1$ 의  $(x, x'), (y, y')$ 에 대한 병합으로  $L^{\text{opt}}$ -경로  $P$ 를 얻는다.

경우 3.2  $s \notin R(1) \cup R(m)$ .  $s = v_j^i$ 라고 둔다. 고장 유형이 T1, T3, T4인 경우를 고려하자. 고장인 요소 둘은 각각 행 1과  $m'$ 에 있다. 만약 고장 유형이 T1이고  $s$ 가 검정 정점인 경우이거나 혹은 고장 유형이 T3, T4인 경우에  $X'' = R(1, i)$ ,  $Y'' = V \setminus X''$ 이라고 두고, 그렇지 않으면  $X'' = R(i, m)$ ,  $Y'' = V \setminus X''$ 이라고 둔다. 다음 조건을 만족하는 세로 에지  $(x, y)$ 를 찾는다: (i)  $x \in X''$ 이고  $y \in Y''$ 이며, (ii)  $x$ 는  $X''$ 에 있는 고장 정점과 다른 색을 가지고, (iii)  $x, y$  모두는  $s, t$ , 그리고 고장 정점과 다르다. 그러면  $L^{\text{opt}}$ -경로  $P = (L^{\text{opt}}[s, xX''], L^{\text{opt}}[y, tY''])$ 이다. 이제 고장 유형이 T2인 경우를 고려한다. 행 2에 두 고장 에지가 있는 경우를 고려한다.  $s \in R(2)$ 임에 유의한다. 다음과 같이  $G \langle X' \rangle$ 의 해밀톤 사이클  $C$ 를 설계한다:  $C = (v_1^1, v_1^2, v_1^3, v_2^2, v_2^3, v_2^1, \dots, v_{n-1}^1, v_{n-1}^2, v_{n-1}^3, v_n^2, v_n^3, v_n^1)$ .  $s'$ 을  $s$ 에 인접한 정점으로  $(s, s')$ 은  $C$ 의 에지이며  $s'$ 에 인접한  $Y'$ 의 정점  $t'$ 이  $t$ 와 다르다고 하자. 그러면  $P = (C \setminus (s, s'), L^{\text{opt}}[t', tY'])$ 이다. 두

고장 예지가 서로 다른 행에 있는 마지막 경우를 고려한다. 만약  $s$ 가 있는 행  $i$ 에 고장 예지가 없다면,  $X'' = R(1, i)$ ,  $Y'' = V \setminus X''$ 이라고 두고, 그렇지 않으면  $X'' = R(i, m)$ ,  $Y'' = V \setminus X''$ 이라고 둔다.  $G\langle X'' \rangle$ 과  $G\langle Y'' \rangle$  각각이 고장 예지 하나씩 가지고 있음에 유의한다. 다음 조건을 만족하는 예지  $(x, y)$ 를 찾는다: (i)  $x \in X''$ ,  $y \in Y''$ 이고, (ii)  $x$ 는  $s$ 와 다른 색을 가지고, (iii)  $x, y$  모두는  $s, t$ 와 다르다. 그러면  $P = (L^{\text{opt}}[s, xX''], L^{\text{opt}}[y, yY''])$ 이다.  $\square$

**따름정리 1** 이분 그래프인  $m \times n$  DLN,  $m \geq 3$ ,  $n \geq 4$ 는 2-고장  $L^{\text{opt}}$ -사이클을 갖는다.

## 4 결론

이 논문에서  $m \times n$  DLN,  $m \geq 3$  홀수,  $n \geq 4$  짝수가 2-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프임과 2-고장  $L^{\text{opt}}$ -사이클을 가짐을 보였다. 이중 루프 네트워크  $G(Na_1, a_2)$ 도 2-고장 해밀톤 laceable 그래프인가 하는 것은 미해결 과제이다.

## 참고문헌

- [1] C.C. Chen and N.F. Quimpo, "On strongly hamiltonian abelian group graphs," in *Australian Conference on Combinatorial Mathematics (Lecture Notes in Mathematics #884)*, pp. 23-34, 1980.
- [2] C.-y. Chou, D.J. Guan, and K.-l. Wang, "A dynamic fault-tolerant message routing algorithm for double-loop networks," *Inform. Proc. Lett.* **70(6)**, pp. 259-264, 1999.
- [3] S.J. Curran and J.A. Gallian, "Hamiltonian cycles and paths in Cayley graphs and digraphs - a survey," *Discrete Mathematics* **156**, pp. 1-18, 1996.
- [4] D.J. Guan, "An optimal message routing algorithm for double-loop networks," *Inform. Proc. Lett.* **65(5)**, pp. 255-260, 1998.
- [5] J.-H. Park and H.-C. Kim, "Fault hamiltonicity of double loop networks  $G(mn; 1, m)$  with even  $m$  and  $n$ ," *Journal of KISS* **27(10)**, pp. 868-879, 2000.
- [6] J.-H. Park and H.-C. Kim, "Fault-hamiltonicity of product graph of path and cycle," in *Proc. of International Computing and Combinatorics Conference COCOON2003 (LNCS #2697)*, MT, USA, pp. 319-328, 2003.
- [7] A. Sengupta, "On ring embedding in hypercubes with faulty nodes and links," *Inform. Proc. Lett.* **68**, pp. 207-214, 1998.
- [8] T.-Y. Sung, C.-Y. Lin, Y.-C. Chuang, and L.-H. Hsu, "Fault tolerant token ring embedding in double loop networks," *Inform. Proc. Lett.* **66**, pp.

- 201–207, 1998.
- [9] C.-H. Tsai, J.J.M. Tan, Y.-C. Chuang, and L.-H. Hsu, “Fault-free cycles and links in faulty recursive circulant graphs,” in *Proc. of Workshop on Algorithms and Theory of Computation ISC2000*, pp. 74–77, 2000.
  - [10] Y.-C. Tseng, S.-H. Chang, and J.-P. Sheu, “Fault-tolerant ring embedding in a star graph with both link and node failures,” *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems* **8(12)**, pp. 1185–1195, Dec. 1997.