

2차원 토러스에서 다대다 서로소인 경로 커버

박 정흠

가톨릭대학교 컴퓨터정보공학부
420-743 경기도 부천시 원미구 역곡 2동 산 43-1
j.h.park@catholic.ac.kr
전화 (02) 2164-4366, 팩스 (02) 2164-4777

Many-to-Many Disjoint Path Covers in Two-Dimensional Tori

Jung-Heum Park

School of Computer Science and Information Engineering
The Catholic University of Korea
Yokgok 2-dong 43-1, Wonmi-gu, Bucheon City, Gyeonggi-do 420-743
j.h.park@catholic.ac.kr
TEL (02) 2164-4366, FAX (02) 2164-4777

* 본 연구는 2009년도 가톨릭대학교 교비연구비의 지원으로 이루어졌음.

2차원 토러스에서 다대다 서로소인 경로 커버

Many-to-Many Disjoint Path Covers in Two-Dimensional Tori

요약

그래프 G 의 쌍형 다대다 k -서로소인 경로 커버(k -DPC)는 k 개의 서로 다른 소스 정점과 싱크 정점 쌍을 연결하며 그래프에 있는 모든 정점을 지나는 k 개의 서로소인 경로 집합을 말한다. 2차원 $m \times n$ 토러스는 길이가 각각 m 과 n 인 두 사이클 C_m 과 C_n 의 곱으로 정의되는 그래프이다. 이 논문에서는 $m \times n$ 토러스($m \geq 3$, 홀수 $n \geq 3$)는 임의의 두 소스-싱크 쌍을 잇는 쌍형 다대다 2-DPC를 가짐을 보인다. 이 결과는 $m \times n$ 토러스가 항상 3-DPC를 가지지는 않는다는 점과 정점이나 에지에 고장이 하나 있더라도 항상 2-DPC를 가지지는 않는다는 점에서 최적이다.

키워드: 서로소인 경로, 경로 커버, 해밀톤 경로, 상호연결망.

Abstract

A *paired many-to-many k -disjoint path cover (k -DPC)* of a graph G is a set of k disjoint paths joining k distinct source-sink pairs in which each vertex of G is covered by a path. A two-dimensional $m \times n$ torus is a graph defined as a product of two cycles C_m and C_n of length m and n , respectively. In this paper, we show that an $m \times n$ torus with $m \geq 3$ and odd $n \geq 3$ has a 2-DPC joining any two source-sink pairs of vertices. This result is optimal in a sense that an $m \times n$ torus does not always have a 3-DPC and that the graph with one faulty vertex or edge does not always have a 2-DPC.

Key words: Disjoint paths, path covers, hamiltonian path, interconnection networks.

1. 서론

노드들 사이의 라우팅(routing)이나 선형 배열(linear arrays)의 임베딩(embedding) 등과 관련하여 여러 상호연결망(interconnection networks)에서 다루는 중요한 문제 중의 하나는 노드가 서로소인 경로(node-disjoint paths)를 찾는 것이다. 노드가 서로소인 경로는 노드들 사이에 효율적인 데이터 라우팅을 위한 병렬 경로로 사용될 수 있다. 또한 노드가 서로소인 경로에서 각 경로는 파이프라인(pipeline) 계산에 이용될 수도 있다. 이 논문에서는 노드가 서로소인 경로를 간단히 서로소인 경로라고 부르기로 한다.

서로소인 경로는 소스(source)와 싱크(sink)의 개수에 따라 다음과 같이 세 가지로 분류할 수 있다: 일대일(one-to-one), 일대다(one-to-many), 그리고 다대다(many-to-many). 세 유형의 서로소인 경로가 그래프 G 에 있는 모든 정점을 지나는 경우를 생각해 볼 수 있다. 서로소인 경로 커버(disjoint path cover; DPC)는 그래프의 모든 정점을 지나서 서로소인 경로들의 집합을 말한다. 서로소인 경로 커버에 대한 문제는 모든 노드를 완전히 활용(utilization)하는 것이 중요한 응용과 관련된다. 선형 배열의 임베딩에서 커버는 모든 노드가 파이프라인 계산에 참여한다는 것을 의미한다. 다대다 서로소인 경로 커버를 찾는 문제가 가장 일반화된 문제이며, 이 논문에서는 다대다 서로소인 경로 커버를 다룬다.

그래프 G 에서 $S \cap T = \emptyset$ 를 만족하는 k 개의 소스 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ 와 k 개의 싱크 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ 가 주어져 있을 때, 소스와 싱크를 잇는 경로 $P_i (1 \leq i \leq k)$ 들의 집합이 서로소이면서 그래프의 모든 정점을 커버하면, 즉 모든 $i \neq j$ 에 대하여 $V(P_i) \cap V(P_j) = \emptyset$ 이고 $\cup_{1 \leq i \leq k} V(P_i) = V(G)$ 이면 이들 경로들의 집합을 다대다 k -서로소인 경로 커버(many-to-many k -disjoint path cover)라고 부른다. 여기서 $V(P_i)$ 는 경로 P_i 에 속한 정점들의 집합이고, $V(G)$ 는 그래프 G 의 정점 집합이다. 이때 소스 s_i 가 항상 싱크 t_i 와 짝지어지면 쌍형(paired) 다대다 DPC라고 부르고, 하나의 소스가 임의의 한 싱크와 짝지어질 수 있으면 비쌍형(unpaired) 다대다 DPC라고 한다. 소스와 싱크를 터미널(terminal)이라고 부른다.

일반적인 그래프에서 임의의 고정된(fixed) $k \geq 1$ 에 대하여 일대일, 일대다, 혹은 다대다 k -DPC가 존재하는가를 묻는 문제는 모두 NP-완전(NP-complete)임이 알려져 있다[1,2]. 제한된 HL-그래프(restricted HL-graph)라고 부르는, 이분 그래프가 아닌 하이퍼큐브형 상호연결망에 대한 쌍형 다대다 DPC[1,2], 비쌍형 다대다 DPC[3]가 연구되었다. 이분 그래프인 하이퍼큐브(hypercube)에서 쌍형 다대다 DPC[4]와 에지 고장을 허용하는 하이퍼큐브에서 쌍형 다대다 DPC[5]에 대한 연구가 있다. 서로소인 경로 커버에 대한 기본적인 성질 및 앞서 언급한 것 이외의 관련 연구는 [1,2]를 참조한다.

2-차원 $m \times n$ 토러스(torus)는 두 사이클 C_m 과 C_n 의 곱 $C_m \times C_n$ 으로 정의된다. 즉, 정점 집합은 $V = \{v_j^i : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ 이고 에지 집합은 $E = E_r \cup E_c \cup E_{r'} \cup E_{c'}$ 이다. 여기서 $E_r = \{(v_j^i, v_{j+1}^i) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j < n\}$, $E_c = \{(v_j^i, v_j^{i+1}) : 1 \leq i < m, 1 \leq j \leq n\}$,

$E_r = \{(v_n^i, v_1^i) : 1 \leq i \leq m\}$, $E_c = \{(v_j^m, v_j^1) : 1 \leq j \leq n\}$ 이다. $m \times n$ 토러스의 예가 그림 1에 있다. $E_r \cup E_c$ 에 속한 에지를 *가로 에지*, $E_c \cup E_c$ 에 속한 에지를 *세로 에지*, 그리고 $E_r \cup E_c$ 에 속한 에지를 *랩어라운드 에지(wraparound edge)*라고 부른다.

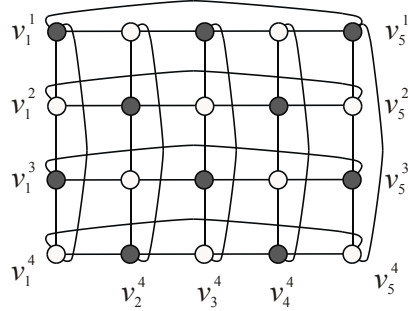


그림 1. 4×5 토러스

$m \times n$ 토러스에서 임의의 가로 에지 쌍 (v, w) , (x, y) 는 서로 similar하다, 즉 $h(v) = x$ 이고 $h(w) = y$ 인 동형 사상(isomorphism) h 가 존재한다. 임의의 두 세로 에지 쌍도 similar하다. 또한 임의의 i, j 에 대하여 $f(v_j^i) = v_j^{m-i+1}$ 을 만족하는 동형 사상 f 가 존재하며, 임의의 i 에 대하여 $g(v_1^i) = v_1^i$ 이고 $2 \leq j \leq n$ 에 대하여 $g(v_j^i) = v_{n-j+2}^i$ 인 동형 사상 g 가 존재한다. $m \times n$ 토러스는 m 과 n 이 모두 짝수이면 이분 그래프(bipartite graph)가 되고, 그렇지 않으면 이분 그래프가 아니다. 이분 그래프는 인접한 두 정점은 항상 다른 색이 되도록 정점을 검정색과 흰색으로 색칠할 수 있는 그래프를 말한다.

토러스에서 서로소인 경로 커버에 대한 연구는 다음과 같은 것들이 있다. 2-차원 $m \times n$ 토러스가 이분 그래프일 때, 임의의 두 소스와 두 싱크에 대하여 네 터미널 중에서 검정 터미널이 둘이고 흰색 터미널이 둘이면 쌍형 2-DPC가 항상 존재함이 증명되었다[6]. 다차원 토러스에 대한 연구도 있다. d -차원 토러스는 사이클 $d(\geq 2)$ 개의 곱으로 정의되는 그래프이다. d -차원 토러스의 일대일 서로소인 경로 커버는 [7]에서 연구되었는데, 이분 그래프가 아닌 d -차원 토러스는 $1 \leq k \leq 2d$ 를 만족하는 임의의 k 에 대하여 임의의 소스-싱크 쌍을 잇는 일대일 k -DPC가 존재함이 증명되었다. 또한 정점이나 에지에 고장을 허용하는 d -차원 토러스에서 고장 요소의 수를 f 개 이하라고 할 때, 이분 그래프가 아니면 $f + 2k \leq 2d - 1$ 을 만족하는 임의의 $f, k \geq 1$ 에 대하여 쌍형 k -DPC를 가진다고 알려져 있다[8].

$m \times n$ 토러스에서 $R(i)$ 와 $C(j)$ 를 각각 행 i 와 열 j 에 있는 정점들의 집합이라고 하자. 즉 $R(i) = \{v_j^i : 1 \leq j \leq n\}$ 이고 $C(j) = \{v_i^j : 1 \leq i \leq m\}$ 이다. $R(i:j)$ 는 $i \leq j$ 이면 $\bigcup_{i \leq k \leq j} R(k)$ 라고 두고, 그렇지 않으면 공집합이다. $C(i:j)$ 도 마찬가지로 정의한다. 이 논문에서 고려하는 $m \times n$ 토러스는 이분 그래프가 아니지만 편의상 검정색과 흰색 두 색을 가지도록 정점에 색깔을 다음과 같이 칠한다: 정점 v_j^i 의 색깔은 $i+j$ 가 짝수이면 검정색이고 홀수이면 흰색이다. P_m 을 정점의 수가 m 인 경로 그래프라고 하자. $m \times n$ 토러스에서 세로 랩어라운드

에지를 모두 제거하면 $P_m \times C_n$ 과 동형이 되고, 램어라운드 에지를 모두 제거하면 $P_m \times P_n$ 과 동형이 된다. $P_m \times C_n$ 이나 $P_m \times P_n$ 을 고려할 때에도 $m \times n$ 토러스에서와 마찬가지로 정점에 색깔이 칠해져 있다고 가정한다.

이 논문에서는 $m \times n$ 토러스, $m \geq 3$, 홀수 $n \geq 3$ 은 임의로 주어진 소스 s_1, s_2 와 두 싱크 t_1, t_2 를 잇는 쌍형 2-DPC를 항상 가짐을 보인다. 이 결과는 $m \times n$ 토러스가 3-DPC를 가질 수 없는 소스-싱크 쌍이 존재하고 또한 고장인 정점이나 에지가 하나라도 있으면 2-DPC를 가질 수 없는 경우가 존재한다는 점에서 최적이다. 예를 들어 그림 1의 4×5 토러스에서 한 정점 s_1 에 인접한 네 정점이 s_2, t_2, s_3, t_3 이라면 당연히 3-DPC가 존재할 수 없게 된다. 또한 (v_1^1, v_5^1) 이 고장 에지라서 쓸 수가 없다면 s_1, t_1, s_2, t_2 가 모두 흰색 정점으로 주어지는 경우에, 두 검정색 정점을 잇는 에지가 하나 밖에 없으므로 2-DPC를 가질 수 없다. 흰색 정점 하나가 고장인 경우에도 s_1, t_1, s_2, t_2 가 모두 흰색 정점이면 마찬가지로 쌍형 2-DPC를 설계할 수 없음을 알 수 있다.

이 논문에서 경로는 정점의 열(sequence)로 나타내고 경로의 길이는 경로에 포함된 정점의 개수이다. 해밀톤 경로(hamiltonian path)는 그래프의 정점을 모두 포함하는 경로이고, 해밀톤 사이클(hamiltonian cycle)은 정점을 모두 포함하는 사이클이다. 임의의 정점 쌍을 잇는 해밀톤 경로가 존재하는 그래프를 해밀톤 연결된(hamiltonian-connected) 그래프라고 한다. 해밀톤 연결되었다는 것과 임의의 소스와 싱크를 잇는 1-DPC가 존재한다는 것은 서로 동치이다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. $m \times n$ 토러스의 서로소인 경로 커버를 다루기 전에 2절에서는 $P_m \times C_n$ 의 서로소인 경로 커버 성질을 다룬다. 이 성질을 이용하여 3절에서 이분 그래프가 아닌 $m \times n$ 토러스는 항상 쌍형 2-DPC를 가짐을 증명하고, 4절에서 결론을 맺기로 한다.

2. $P_m \times C_n$ 의 서로소인 경로 커버

$m \times n$ 토러스에 대한 2-DPC를 설계하기 위하여, 이 절에서는 토러스의 부분 그래프인 $P_m \times C_n$ 의 서로소인 경로 성질을 고찰한다. 아래 보조정리는 $P_m \times C_n$ 의 서로소인 경로 커버 성질을 밝히기 위해서 이용하는 $P_m \times C_n$ 과 $P_m \times P_n$ 의 해밀톤 성질이다. 사각 그리드 $P_m \times P_n$ 에서 분기수(degree)가 2인 정점을 꼭지 정점(corner vertex)라고 부른다.

보조정리 1. [9,10] $P_m \times C_n$, $m \geq 2$, $n \geq 3$ 인 홀수는 해밀톤 연결된 그래프이다.

보조정리 2. [11] G 를 사각 그리드 $P_m \times P_n$, $m, n \geq 2$ 이라고 하자. mn 이 짝수일 때, G 에는 임의의 꼭지 정점 v 로부터 v 와 다른 색을 가진 임의의 정점까지의 해밀톤 경로가 존재한다.

$P_m \times C_n$ 은 n 이 짝수이면 이분 그래프이고, 홀수이면 이분 그래프가 아니다. 이제 $P_m \times C_n$ 의 서로소인 경로 성질을 아래 정리 1에서 다룬다.

정리 1. 그래프 G 를 $P_m \times C_n$, $m \geq 2$, 홀수 $n \geq 3$ 이라고 두자. G 에 있는 임의의 서로 다른 세 터미널 s_1, t_1, s_2 에 대하여 $R(1) \cup R(m)$ 에 두 정점 $x_i, i=1,2$ 가 존재하여, 각 x_i 에 대하여 s_1-t_1 경로와 s_2-x_i 경로로 이루어진 G 의 2-DPC가 존재한다. 여기서, x_i 는 s_2 와 같은 정점일 수 있고, 이 경우 s_2-x_i 경로의 길이는 1이다.

정리 1을 증명하기 위하여 $m=2$ 인 기본 경우를 다음 보조정리 3에서 먼저 고려한다. $u-v$ 경로는 정점 u 와 v 를 잇는 경로를 말한다.

보조정리 3. $m=2$ 일 때 정리 1이 성립한다.

증명. G 의 s_1-s_2 해밀톤 경로에서 t_1 바로 다음 정점을 x_1 이라고 하자. 즉 해밀톤 경로가 $(s_1, \dots, t_1, x_1, \dots, s_2)$ 와 같이 표현된다. 이 경로에서 (t_1, x_1) 에지를 제거하면 2-DPC를 얻을 수 있다. 마찬가지로 t_1-s_2 해밀톤 경로에서 s_1 바로 다음 정점을 x_2 라고 두면, s_1-t_1 경로와 s_2-x_2 경로로 이루어진 2-DPC를 얻는다. 만약 $x_1 \neq x_2$ 이면 증명이 끝난다. 이제 $x_1 = x_2$ 라고 가정하자. 그러면 s_1, t_1 과 동시에 인접한 정점 y 가 존재한다.

경우 1: $s_1, t_1 \in R(1)$.

이 경우 반드시 $y \in R(1)$ 이다. 먼저 $y \neq s_2$ 일 때에는 s_1-t_1 경로를 (s_1, y, t_1) 으로 둔다. G 에서 s_1-t_1 경로에 속하는 세 정점을 제거하여 남는 그래프는 해밀톤 사이클을 가진다. 이 해밀톤 사이클 상에서 s_2 에 인접한 두 정점을 x_1, x_2 라고 하면 s_2 에 인접한 에지를 하나씩 제거하여 s_2-x_1 경로와 s_2-x_2 경로를 얻을 수 있다. 이제 $y = s_2$ 인 경우를 고려한다. $R(1)$ 으로 유도된 부분 그래프(induced subgraph)에서 s_2 를 제거하면 s_1-t_1 경로가 된다. $R(2)$ 로 유도된 부분 그래프는 해밀톤 사이클을 이루므로, s_2 에 인접한 $R(2)$ 의 정점을 z 라고 할 때, 해밀톤 사이클 상에서 z 에 인접한 두 끝점 x_1, x_2 각각을 잇는 s_2-x_i 경로가 존재한다.

경우 2: $s_1 \in R(1)$ 이고 $t_1 \in R(2)$.

일반성을 잃지 않고 $s_1 \in C(1)$, 즉 $s_1 = v_1^1$ 이라고 둔다. s_1, t_1 과 동시에 인접한 정점 y 가 존재하므로, t_1 은 v_n^2 혹은 v_2^2 이다. 앞서 서론에서 언급한 바와 같이 $g(v_1^1) = v_1^1$ 이고 $g(v_2^2) = v_n^2$ 인 동형 사상 g 가 존재하므로, 일반성을 잃지 않고 $t_1 = v_n^2$ 이라고 둔다. 먼저 $s_2 = v_1^1$ 인 경우를 고려한다. 보조정리 2에 의하여 $C(2:n)$ 으로 유도된 부분 그래프에서 v_n^1 과 t_1 을 잇는 해밀톤 경로 P_h 가 존재하므로 s_1-t_1 경로를 (s_1, P_h) 라고 두고 s_2-x_1 경로를 (s_2) 라고 두면 $x_1 = s_2$ 인 2-DPC가 된다. 이제 s_1-t_1 경로를 $(v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1, v_n^2)$ 라고 두고 s_2-x_2 경로를

$(v_1^2, v_2^2, \dots, v_{n-1}^2)$ 이라고 두면 $x_2 = v_{n-1}^2$ 인 2-DPC가 된다. $x_1 \neq x_2$ 이므로 이 경우 증명이 끝났다. $s_2 = v_n^1$ 인 경우는 방금 고려한 경우와 대칭적이다.

이제 $s_2 \in C(2:n-1)$ 인 경우를 고려한다. s_2 가 흰색 정점이라면 경로 (s_1, v_n^1, t_1) 과 함께 $C(2:n-1)$ 로 유도된 부분 그래프에서 s_2 와 v_2^2 를 잇는 해밀톤 경로 P_h' 에 대하여 (P_h', v_1^2) 은 $x_1 = v_1^2$ 인 2-DPC가 된다. P_h' 의 존재는 보조정리 2에 의한 것이다. 또 다른 2-DPC를 설계하기 위하여, G 에서 열 번호가 낮은 정점을 순서대로 지나는 s_1-t_1 해밀톤 경로 $(v_1^1, v_1^2, v_2^2, v_2^1, \dots, v_{n-1}^2, v_{n-1}^1, v_n^1, v_n^2)$ 을 생각해보자. 이 경로 상에서 s_2 바로 다음 정점을 x_2 라고 두면, 이 두 정점을 제거하더라도 s_1-t_1 경로가 됨을 관찰할 수 있다. 물론 s_2-x_2 경로를 (s_2, x_2) 라고 두면 2-DPC가 되고, 당연히 $x_1 \neq x_2$ 이 성립한다. s_2 가 검정 정점일 경우는 흰색인 경우와 대칭적이다. (G 를 180도 회전하고 정점의 색깔을 바꾸면 된다.) 따라서 증명이 끝났다. \square

정리 1의 증명. m 에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다. 기본 경우 $m=2$ 일 때는 위의 보조정리 3에서 보였다. $m \geq 3$ 이라고 가정한다. $R(1)$ 이나 $R(m)$ 에 터미널이 없는 경우와 $R(1)$ 과 $R(m)$ 이 모두 터미널을 가지는 경우로 나누어서 증명한다.

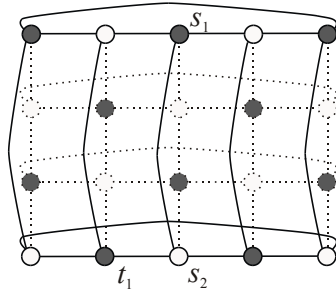
경우 1: $R(1)$ 이나 $R(m)$ 에 터미널이 없는 경우.

일반성을 잃지 않고 $s_1, t_1, s_2 \in R(1:m-1)$ 이라고 가정한다. $R(1:m-1)$ 로 유도된 부분 그래프는 $P_{m-1} \times C_n$ 과 동형이므로 귀납적 가설에 의하여 어떤 $x_i' \in R(1) \cup R(m-1)$, $i=1, 2$ 에 대하여 s_1-t_1 경로와 s_2-x_i' 경로 이루어진 2-DPC가 존재한다. x_1' 이나 x_2' 중에서 한 x_i' 이 $R(m-1)$ 에 속한다면 s_2-x_i' 경로를 $R(m)$ 으로 연장하여 $R(m)$ 상에서 조건을 만족하는 서로 다른 두 끝점 x_1, x_2 을 위 보조정리 3 경우 1의 $y=s_2$ 일 때의 증명과 같은 방식으로 선택하면 된다.

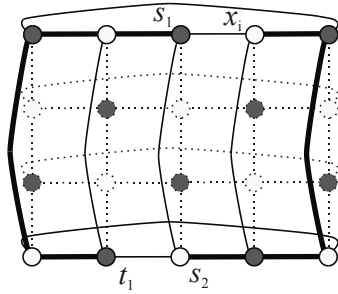
이제 $x_1', x_2' \in R(1)$ 이라고 하자. 만약 2-DPC에 속한 경로중 하나라도 행 $m-1$ 에 속한 에지 (u, v) 를 지난다면, 이 에지를 삭제한 다음 u, v 를 $R(m)$ 으로 연장하고 연장된 두 정점을 $R(m)$ 으로 유도된 부분 그래프의 해밀톤 경로로 연결하면 충분하다. 이제 그런 (u, v) 가 존재하지 않는다고 가정하자. $R(1:m-1)$ 로 유도된 부분 그래프에서 $R(m-1)$ 에 속한 모든 정점의 분기수(degree)가 3이고, 터미널이 아닌 정점은 2-DPC에 있는 한 경로의 중간 정점이 되어야 한다. 따라서 그런 (u, v) 가 존재하지 않는다는 말은 $n=3$ 이고 모든 터미널은 $R(m-1)$ 에 속한다는 것을 의미한다. $R(1:m-2)$ 로 유도된 부분 그래프가 m 의 크기에 관계없이 해밀톤 연결되어 있다는 사실을 이용하여, s_1-t_1 경로는 s_2 를 제외한 $R(1:m-1)$ 의 모든 정점을 지나도록 설계하고, s_2 를 $R(m)$ 으로 연장하면 $R(m)$ 으로 유도된 부분 그래프가 해밀톤 사이클을 가지므로 서로 다른 끝점 x_1, x_2 를 잇는 경로를 만들면 된다.

경우 2: $R(1)$ 과 $R(m)$ 이 모두 터미널을 가지는 경우.

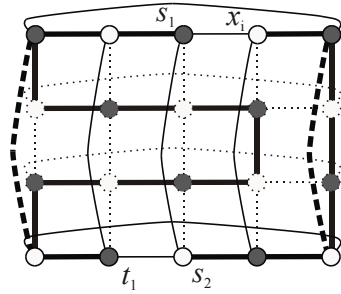
터미널을 포함하지 않은 연속적인 두 행이 존재하는, 즉 어떤 i , $1 < i < i+1 < m$ ($m \geq 4$)에 대하여 $s_1, t_1, s_2 \notin R(i:i+1)$ 인 경우를 먼저 고려한다. 이 경우 $R(i:i+1)$ 에 속한 정점과 그에 인접한 에지를 모두 제거한 다음 모든 j , $1 \leq j \leq n$ 에 대하여 $R(i-1)$ 의 정점 v_j^{i-1} 과 $R(i+2)$ 의 정점 v_j^{i+2} 을 잇는 가상의 에지를 추가하면 $P_{m-2} \times C_n$ 과 동형이 된다. 예를 들어 그림 2a는 $P_4 \times C_5$ 에서 2행과 3행을 제거하여 만든 $P_2 \times C_5$ 를 보여준다. 귀납적 가설에 의하여 이 그래프는 $i=1,2$ 에 대하여 s_1-t_1 경로와 s_2-x_i 경로 이루어진 2-DPC가 존재한다. 이제 이 두 경로를 확장하여 $R(i:i+1)$ 의 정점을 모두 지나도록 만들고자 한다.



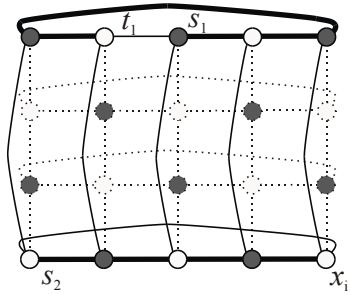
(a)



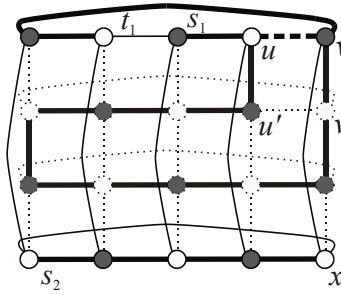
(b)



(c)



(d)



(e)

그림 2. 정리 1 증명의 경우 2 설명

이 2-DPC가 가상 에지를 하나 이상 지난다면(그림 2b와 2c 참조), 경로가 지나는 가상 에지를 $(v_{j_1}^{i-1}, v_{j_1}^{i+2}), (v_{j_2}^{i-1}, v_{j_2}^{i+2}), \dots, (v_{j_k}^{i-1}, v_{j_k}^{i+2})$ 라고 하고, 일반성을 잃지 않고 $j_1 = 1, j_1 < j_2 < \dots < j_k, j_{k+1} = n+1$ 이라고 가정한다. 각각의 가상 에지 $(v_{j_r}^{i-1}, v_{j_r}^{i+2})$ 를 $(v_{j_r}^{i-1}, v_{j_r}^i, v_{j_r+1}^i, \dots, v_{j_{r+1}-1}^i, v_{j_{r+1}-1}^{i+1}, \dots, v_{j_r+1}^{i+1}, v_{j_r}^{i+1}, v_{j_r}^{i+2})$ 로 대체하여 $2(j_{r+1} - j_r)$ 개의 정점을 추가로 지나도록 하면 충분하다. 2-DPC가 가상 에지를 하나도 지나지 않는다면(그림 2d와 2e 참조), 행 $i-1$ 이나 행 $i+2$ 상의 최소한 한 에지 (u, v) 를 지남을 먼저 보인다. 두 행에 속한 정점은 최소한 6개 이상이고, 이들 중 둘 이상은 2-DPC의 중간 정점이 되어야 하므로 당연히 성립한다. 이 에지 (u, v) 를 $R(i:i+1)$ 로 유도된 부분 그래프에서 각각 u, v 에 인접한 정점 u' 과 v' 을 잇는 해밀톤 경로로 대체하면 충분하다.

앞으로 터미널을 포함하지 않은 연속적인 두 행은 존재하지 않는다고 가정한다. 그러면 $R(1)$ 과 $R(m)$ 이 모두 터미널을 가지고 있기 때문에 $m \leq 5$ 이다. 일반성을 잃지 않고 $s_1 \in R(1)$ 이라고 가정한다.

경우 2.1: $s_2 \in R(m)$.

먼저 $t_1 \in R(1:m-1)$ 이라면 $R(1:m-1)$ 로 유도된 부분 그래프에서 $s_1 - t_1$ 해밀톤 경로를 보조정리 1을 이용하여 찾고, $R(m)$ 으로 유도된 부분 그래프에서 $s_2 - x_i$ 해밀톤 경로, $i = 1, 2$ 를 찾으면 충분하다. $t_1 \in R(m)$ 라고 하자. 그러면 $m = 3$ 이다. $R(3)$ 로 유도된 부분 그래프의 해밀톤 사이클을 분할하여 어떤 x_i, y_i 쌍에 대하여, $i = 1, 2, s_2 - x_i$ 경로와 $t_1 - y_i$ 경로가 $R(3)$ 를 커버하도록 한다. 이때 $x_1 \neq x_2$ 이 성립하도록 한다. $R(1:2)$ 로 유도된 부분 그래프에서 s_1 과 y_i 에 인접한 $R(2)$ 의 정점을 잇는 해밀톤 경로를 찾아 연결하면 된다.

경우 2.2: $t_1 \in R(m)$.

위 경우 2.1에 의하여 $s_2 \in R(2:m-1)$ 인 경우만 고려하면 된다. 먼저 $R(2:m)$ 으로 유도된 부분 그래프에서 행 2에 있는 에지를 둘 이상 지나는 $s_2 - t_1$ 해밀톤 경로가 존재함을 주장한다. $n \geq 5$ 이거나 혹은 $n = 3$ 이고 $s_2 \notin R(2)$ 이면 $R(2)$ 에 셋 이상의 중간 정점이 있으므로 당연하다. $n = 3$ 이고 $s_2 \in R(2)$ 이면 s_2 에서 출발하여 행 2의 두 에지를 연속하여 지난 다음 $R(3)$ 으로 내려가는 경로 중에서, t_1 과 다른 정점 y 로 내려간 다음 $R(3:m)$ 으로 유도된 부분 그래프에서 y 와 t_1 을 잇는 해밀톤 경로를 찾으면 된다. $n = 3$ 일 때 $P_{m'} \times C_3$ 은 임의의 $m' \geq 1$ 에 대하여 해밀톤 연결되어 있음에 유의한다. $P_{m'} \times C_3$ 의 해밀톤 연결성은 $m' \geq 2$ 일 때는 보조정리 1에 따른 것이고 $m' = 1$ 일 때는 그것이 C_3 과 동형이기 때문이다. 주장의 증명이 끝났다.

위 주장의 조건을 만족하는 $s_2 - t_1$ 해밀톤 경로 상에 있는 행 2의 에지 하나 (u, v) 를 제거하고 u, v 를 행 1로 확장한 다음 행 1의 해밀톤 경로로 연결하여 그래프 G 의 $s_2 - t_1$ 해밀톤 경로를 설계할 수 있다. 더구나 삭제하여 확장할 수 있는 에지가 둘 있으므로, $s_2 - t_1$ 해

밀톤 경로에서 s_1 을 지나기 직전의 정점 x_1 이 $R(1)$ 에 있도록 설계할 수 있다. 이 해밀톤 경로에서 에지 (x_1, s_1) 을 제거하여 원하는 2-DPC 하나를 얻는다. 또 다른 2-DPC는 위의 경우와 대칭적인 방법으로 $R(m)$ 에 있는 정점 x_2 에 대하여 s_1-t_1 경로와 s_2-x_2 경로로 구성된 2-DPC를 찾을 수 있다. 따라서 정리 1의 증명이 모두 끝났다. \square

3. $m \times n$ 토러스의 서로소인 경로 커버

이 절에서는 $m \times n$ 토러스, $m \geq 3$, 홀수 $n \geq 3$ 에서 임의로 주어진 소스 s_1, s_2 와 두 싱크 t_1, t_2 를 잇는 쌍형 2-DPC가 존재함을 보인다. 먼저 $m \times n$ 토러스 문제를 $m' + n' < m + n$, $m' \leq m$, 그리고 $n' \leq n$ 인 $m' \times n'$ 토러스 문제로의 변환을 먼저 고려한다.

보조정리 4. 두 소스 s_1, s_2 와 싱크 t_1, t_2 가 주어진 $m \times n$ 토러스, $m \geq 5$, $n \geq 3$ 에서 터미널을 포함하지 않은 두 연속적인 행 $R(i)$ 와 $R(i+1)$ 이 존재하면, $(m-2) \times n$ 토러스의 쌍형 2-DPC를 이용하여 $m \times n$ 토러스의 쌍형 2-DPC를 설계할 수 있다.

증명. 일반성을 잃지 않고 $1 < i < i+1 < m$ 이라고 가정한다. 이 보조정리의 증명은 정리 1의 증명과 같이 터미널을 가지지 않은 두 행을 제거하고 가상 에지를 추가한 다음 2-DPC를 구하고, 다시 이 2-DPC를 확장하여 제거한 두 행의 정점을 모두 지나도록하는 방식으로 증명할 수 있다. \square

위 보조정리 4는 m, n 이 홀수이든 짝수이든 상관없이 성립함을 관찰한다. 따라서 터미널을 가지지 않은 연속적인 열이 존재하는 경우에도 적용할 수 있다. 아래 보조정리 5에 있는 네 종류의 토러스는 정점의 개수가 더 작은 토러스로 변환하지 않고 직접 2-DPC를 구한다.

보조정리 5. 2차원 3×3 토러스와 $4 \times 3, 4 \times 5, 4 \times 7$ 토러스는 모두 임의의 두 소스 s_1, s_2 와 두 싱크 t_1, t_2 를 잇는 쌍형 2-DPC를 갖는다.

증명. 각 토러스에 대해서 경우를 나누어 세밀하게 관찰하면 보조정리와 같은 결론에 도달할 수 있다. 증명은 모든 경우를 다 따져보는 방식인데, 여기서는 생략하기로 한다. \square

정리 2. $m \times n$ 토러스, $m \geq 3$, 홀수 $n \geq 3$ 은 임의로 주어진 소스 s_1, s_2 와 두 싱크 t_1, t_2 를 잇는 쌍형 2-DPC를 갖는다.

증명. 먼저 $m \geq 5$ 이고 터미널을 가지지 않은 연속적인 두 행 $R(i), R(i+1)$ 이 존재하면 보조정리 4를 이용하여 $(m-2) \times n$ 토러스 문제로 변환한다. 따라서 $m \leq 8$ 인 경우만 고려하면 된다. $5 \leq m \leq 8$ 이면 하나의 터미널만 포함한 연속적인 두 행 $R(i), R(i+1)$ 이 존재한다고 주장한다. $R(1:2)$ 와 $R(3:4)$ 가 각각 터미널 둘을 가지고 있으면, $R(5:m)$ 에는 터미널이 없다. $m \geq 6$ 이면 터미널을 가지지 않은 연속적인 두 행이 존재하게 되어 모순이다.

$m=5$ 라면 $R(5)$ 에는 터미널이 없으므로 각각 $R(1)$ 과 $R(4)$ 가 터미널 둘을 가져야 하는데, 이렇게 되면 $R(2:3)$ 에 터미널이 없게 되어 모순이 발생한다. 주장에 대한 증명이 끝났다.

$R(i:i+1)$ 이 터미널 하나만 가진다고 하자. 일반성을 잃지 않고 $i=m-1$, $t_2 \in R(m-1:m)$ 이라고 가정한다. $R(1:m-2)$ 로 유도된 부분 그래프 G' 은 $P_{m-2} \times C_n$ 과 동형이므로 정리 1에 의하여, 어떤 $x_i \in R(1) \cup R(m-2)$, $i=1,2$ 에 대하여 s_1-t_1 경로와 s_2-x_i 경로로 이루어진 2-DPC가 존재한다. 이 두 x_i 들 중에서 x_1 에 인접한 $R(m-1:m)$ 의 정점 y_1 이 t_2 와 다르다고 하자. s_2-x_1 경로와 $R(m-1:m)$ 로 유도된 부분 그래프의 y_1-t_2 해밀톤 경로를 찾아서 하나로 묶으면, s_1-t_1 경로와 함께 우리가 원하는 $m \times n$ 토러스의 2-DPC가 된다.

이제 $m \leq 4$ 라고 가정한다. 보조정리 4를 연속적인 행 대신에 연속적인 열에 대해서도 적용할 수 있으므로 $n \leq 8$ 이라고 가정할 수 있다. 이제 남은 것은 $m=3,4$ 이고 $n=3,5,7$ 인 여섯 경우이다. 그런데 3×5 토러스는 5×3 토러스와 동형이므로, 행의 개수를 둘 줄여서 3×3 토러스 문제로 변환된다. 3×7 토러스도 마찬가지로 결국에는 3×3 토러스 문제로 변환된다. 최종적으로 남은 네 종류의 토러스는 보조정리 5에서 고려되었다. 따라서 정리 2의 증명이 끝났다. \square

따름정리 1. $m \times n$ 토러스, $m \geq 3$, 홀수 $n \geq 3$ 은 임의로 주어진 소스 s_1, s_2 와 두 싱크 t_1, t_2 를 잇는 비쌍형 2-DPC를 갖는다.

위 따름정리 1의 비쌍형 2-DPC 결과도 최적이다. 그림 1의 4×5 토러스에서 소스 셋과 싱크 셋이 모두 흰색 정점으로 주어지면 검정색 정점을 잇는 에지가 둘 밖에 없기 때문에 비쌍형 3-DPC가 존재하지 않는다. 에지나 정점 하나가 고장이더라도, 앞서 쌍형 2-DPC가 존재하지 않는다는 추론과 동일한 방식으로 비쌍형 2-DPC가 존재하지 않음을 보일 수 있다.

4. 결론

이 논문에서는 이분 그래프가 아닌 2-차원 $m \times n$ 토러스에 임의의 두 소스-싱크 쌍이 주어지더라도 그것을 잇는 쌍형 2-DPC가 존재함을 보였다. 증명에는 $P_m \times C_n$ 의 서로소인 경로 커버 성질과 $P_m \times P_n$ 의 해밀톤 성질이 이용되었다. 증명을 따라가면 $m \times n$ 토러스에서 쌍형 2-DPC를 구하는 재귀적인 알고리즘을 설계할 수 있다. 이 논문의 결과를 이용하여 이분 그래프가 아닌 d -차원 토러스는 $f+2k \leq 2d$ 을 만족하는 임의의 $f \geq 0$, $k \geq 2$ 에 대하여 항상 쌍형 k -DPC를 가진다고 보일 수 있을 것이라고 추측한다.

참고문헌

- [1] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Many-to-many disjoint path covers in hypercube-like interconnection networks with faulty elements," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems* **17(3)**, pp. 227–240, Mar. 2006.
- [2] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Many-to-many disjoint path covers in the presence of faulty elements," *IEEE Trans. Computers* **58(4)**, pp. 528–540, Apr. 2009.
- [3] J.-H. Park, "Unpaired many-to-many disjoint path covers in hypercube-like interconnection networks," *Journal of KIISE: Computer Systems and Theory* **33(10)**, pp. 789–796, Oct. 2006 (in Korea).
- [4] P. Gregor and T. Dvořák, "Path partitions of hypercubes," *Inform. Proc. Lett.* **108(6)**, pp. 402–406, 2008.
- [5] T. Dvořák and P. Gregor, "Partitions of faulty hypercubes into paths with prescribed endvertices," *SIAM J. Discrete Mathematics* **22(4)**, pp. 1448–1461, 2008.
- [6] K. Makino, "2-disjoint path covers in mesh-torus," *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* **1489**, Kyoto University, pp. 181–187, 2006.
- [7] C.-H. Jeong and H.-C. Kim, "Super spanning connectivity of non-bipartite tori," Proc. of the 36th KIISE Fall Conference, vol. 36, no. 2(C), pp. 267–268, 2009 (in Korean).
- [8] E. Kim and J.-H. Park, "Paired many-to-many disjoint path covers in recursive circulants and tori," *Journal of KIISE: Computer Systems and Theory* **36(1)**, pp. 40–51, Feb. 2009 (in Korean).
- [9] H.-C. Kim and J.-H. Park, "Fault hamiltonicity of two-dimensional torus networks," in *Proc. of Workshop on Algorithms and Computation WAAC'00*, Tokyo, Japan, pp. 110–117, 2000.
- [10] C.-H. Tsai, J.J.M. Tan, Y.-C. Chuang, and L.-H. Hsu, "Fault-free cycles and links in faulty recursive circulant graphs," in *Proc. of Workshop on Algorithms and Theory of Computation ISC2000*, pp. 74–77, 2000.
- [11] C.C. Chen and N.F. Quimpo, "On strongly hamiltonian abelian group graphs," in *Australian Conference on Combinatorial Mathematics (LNCS #884)*, pp. 23–34, 1980.