

이중 루프 네트워크의 다대다 서로소인 경로 커버

박 정흠

가톨릭대학교 컴퓨터정보공학부
420-743 경기도 부천시 원미구 역곡 2동 산 43-1
j.h.park@catholic.ac.kr
전화 (02) 2164-4366, 팩스 (02) 2164-4777

Many-to-Many Disjoint Path Covers in Double Loop Networks

Jung-Heum Park

School of Computer Science and Information Engineering
The Catholic University of Korea
Yokkok 2-dong 43-1, Wonmi-gu, Puchon City, Kyonggi-do 420-743
j.h.park@catholic.ac.kr
TEL (02) 2164-4366, FAX (02) 2164-4777

* 본 연구는 2004년도 가톨릭대학교 교비연구비의 지원으로 이루어졌음.

이중 루프 네트워크의 다대다 서로소인 경로 커버

Many-to-Many Disjoint Path Covers in Double Loop Networks

요약

그래프 G 의 다대다 k -서로소인 경로 커버(k -DPC)는 k 개의 서로 다른 소스 정점과 싱크 정점 쌍을 연결하며 그래프에 있는 모든 정점을 지나는 k 개의 서로소인 경로 집합을 말한다. 이 논문에서는 이중 루프 네트워크 $G(mn;1,m)$ 에서 다대다 2-DPC를 고찰하여, 이분 그래프가 아닌 모든 $G(mn;1,m)$, $m \geq 3$ 은 임의의 두 소스-싱크 쌍을 연결하는 다대다 2-DPC가 존재하고 이분 그래프인 $G(mn;1,m)$ 은 두 흰색-검정 소스-싱크 쌍이거나 혹은 검정-검정, 흰색-흰색 쌍을 연결하는 2-DPC가 존재함을 보인다. $G(mn;1,m)$ 은 m 이 홀수이고 n 이 짝수일 경우에만 이분 그래프이다.

키워드: 서로소인 경로 커버, 이중 루프 네트워크, 강한 해밀톤 성질, 상호 연결망, circulant 그래프

Abstract

A many-to-many k -disjoint path cover (k -DPC) of a graph G is a set of k disjoint paths joining k distinct source-sink pairs in which each vertex of G is covered by a path. In this paper, we investigate many-to-many 2-DPC in a double loop network $G(mn;1,m)$, and show that every nonbipartite $G(mn;1,m)$, $m \geq 3$, has 2-DPC joining any two source-sink pairs of vertices and that every bipartite $G(mn;1,m)$ has 2-DPC joining any two source-sink pairs of black-white vertices and joining any pairs of black-black and white-white vertices. $G(mn;1,m)$ is bipartite if and only if m is odd and n is even.

Key words: Disjoint path covers, double loop networks, strong hamiltonicity, interconnection networks, circulant graphs

1 서론

노드들 사이의 라우팅(routing)이나 선형 배열(linear arrays)의 임베딩(embedding) 등과 관련하여 여러 상호 연결망(interconnection networks)에서 중요한 문제 중의 하나는 노드가 서로소인 경로(node-disjoint paths)를 찾는 것이다. 노드가 서로소인 경로는 노드들 사이의 효율적인 데이터 라우팅을 위한 병렬 경로로 사용될 수 있다. 또한 노드가 서로소인 경로에서 각 경로는 파이프라인(pipeline) 계산에 이용될 수도 있다. 상호 연결망은 자주 그래프로 모델되는데, 정점과 에지는 각각 노드와 통신 링크에 대응한다. 이 논문에서, 노드가 서로소인 경로를 간단히 서로소인 경로라고 부르기로 한다.

서로소인 경로는 다음과 같이 세 가지로 분류할 수 있다: 일대일(one-to-one), 일대다(one-to-many), 다대다(many-to-many). 연결도(connectivity)가 k 인 그래프 G 가 있다고 하자. Menger의 정리를 따르면 G 의 서로 다른 두 노드 사이에 k 개의 서로소인 경로가 존재한다. 이것은 일대일 부류에 속하게 된다. Menger의 정리를 조금만 확장하면 한 노드에서 서로 다른 k 개의 노드 사이에 k 개의 서로소인 경로가 존재함을 보일 수 있다. 이것은 일대다 부류에 속한다. 마찬가지로 방식으로 확장하면 임의의 k 개의 노드로부터 다른 k 개의 노드 사이에 k 개의 서로소인 경로를 정의할 수 있다.

세 유형의 서로소인 경로가 그래프 G 에 있는 모든 정점을 지나는 것을 생각해 볼 수 있다. 서로소인 경로 커버(disjoint path cover)는 그래프의 모든 정점을 지나는 서로소인 경로들의 집합이다. 서로소인 경로 커버 문제는 모든 노드를 완전히 활용(utilization)하는 것이 중요한 응용과 관련된다. 선형 배열의 임베딩에서 커버는 모든 노드가 파이프라인 계산에 참여한다는 것을 의미한다. 서로소인 경로 커버에 대하여 연구된 것들로는, 일대일 경로 커버에 대하여 정점이나 에지에 고장이 없는 재귀원형군(recursive circulant)[1,2], 에지 고장이 있는 하이퍼큐브(hypercubes)[3]에 대한 연구가 있고, 하이퍼큐브형 상호 연결망에 대한 일대다 서로소인 경로 커버[4]와 다대다 서로소인 경로 커버[5,6]가 발표되어 있다. k 개의 경로로 이루어진 일대일 서로소인 경로 커버는 k^* -container라고도 알려져 있다[2,3].

그래프 G 에서 $S \cap T = \emptyset$ 를 만족하는 k 개의 소스 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ 와 k 개의 싱크 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ 가 주어져 있을 때, 모든 $1 \leq i \leq k$ 에 대하여 s_i 와 t_i 를 연결하는 경로 P_i 들의 집합이 서로소이면서 그래프의 모든 정점을 커버하면, 즉 모든 $i \neq j$ 에 대하여 $V(P_i) \cap V(P_j) = \emptyset$ 이고 $\cup_{1 \leq i \leq k} V(P_i) = V(G)$ 이면 이들 경로들의 집합을 다대다 k -서로소인 경로 커버(many-to-many k -disjoint path cover)라고 부른다. 여기서 $V(P_i)$ 는 경로 P_i 에 속한 정점들의 집합이고, $V(G)$ 는 그래프 G 의 정점 집합이다. 소스와 싱크를 터미널(terminal)이라도 부른다.

이중 루프 네트워크 $G(N, a_1, a_2)$ 는 다음과 같이 정의되는 분지수가 4인 (무향) 그래프이다: 정점의 집합 $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{N-1}\}$, 에지 집합 $E = \{(v_s, v_t) \mid s + a_i \equiv t \pmod{N}\}$

을 만족하는 $i (1 \leq i \leq 2)$ 가 존재한다}. $G(N, a_1, a_2)$ 는 N 개의 정점과 크기가 각각 a_1, a_2 인 두 개의 점프를 가지는 circulant 그래프라고 정의할 수 있다. 이중 루프 네트워크는 $\phi_k(v_i) = v_{i+k \pmod{N}}$ 인 동형 사상(automorphism) ϕ_k 와 $\psi_k(v_i) = v_{2k-i \pmod{N}}$ 인 동형 사상 ψ_k 를 가진다. 이중 루프 네트워크는 [7-9]에서 널리 연구되었다. 앞으로 이 논문에서 이중 루프 네트워크 $G(mn; 1, m)$ 을 $m \times n$ DLN이라고 쓰기로 한다. $m \times n$ DLN은 m 이 홀수이고 n 이 짝수일 경우에만 이분 그래프(bipartite graph)가 된다.

한편, 고장이 있는 상호 연결망에 선형 배열과 링을 임베딩(embedding)하는 것은 병렬 처리에서 중요한 이슈의 하나이다. 그것은 정점이나 에지에 고장이 있는 그래프에서 길이가 가장 긴 경로와 사이클을 찾는 문제로 모델된다. 문헌에는 여러 다양한 연결망 그래프의 고장 해밀톤 성질이 연구되어 있다[9-12]. 이분 그래프가 아닌 $m \times n$ DLN은 1-고장 해밀톤 연결된 그래프이며 2-고장 해밀톤 그래프임이 증명되어 있다[13,14]. 즉, $m \times n$ DLN - F 는 $|F| \leq 1$ 인 임의의 고장 요소 집합 F 에 대해서 임의의 두 정점을 잇는 해밀톤 경로를 갖고, $|F| \leq 2$ 인 임의의 고장 요소 집합 F 에 대해서 해밀톤 사이클을 갖는다. 이분 그래프인 $m \times n$ DLN, $m \geq 3$ 인 홀수, $n \geq 4$ 인 짝수는 2-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프임이, 즉 고장인 정점이나 에지 수가 2 이하일 때, 임의의 두 정점을 잇는 L^{opt} -경로가 존재함이 증명되었다[15]. L^{opt} -경로는 이분 그래프에서 소스와 싱크의 색깔을 고려한 최장 경로로 그 정의는 [15]을 참조한다.

다대다 서로소인 경로의 정의를 정점이나 에지 고장을 허용하도록 정의할 수 있다. 고장인 요소의 수가 f 개 이하일 때, 크기가 k 인 임의의 소스 집합 S 와 싱크 집합 T 를 잇는 다대다 서로소인 경로 커버를 가지기 위해서는 $f + 2k \leq \delta(G) + 1$ 를 만족해야 함이 알려져 있다[5,6]. 여기서, $\delta(G)$ 는 그래프 G 의 최소 분지수이다. $m \times n$ DLN, $m, n \geq 3$ 의 분지수가 4이므로, 서로소인 경로의 수 k 가 2인 경우는 $f = 0, 1$ 이면 위의 필요조건을 만족하게 된다. 이 논문에서는 $k = 2$ 인 경우를 고려하여, $f = 1$ 이면 2-DPC가 존재하지 않는 경우가 있음을 보이고, $f = 0$ 이면 이분 그래프가 아닌 모든 $m \times n$ DLN, $m \geq 3$ 은 임의의 두 소스-싱크 쌍을 연결하는 다대다 2-DPC가 존재하고 이분 그래프인 $m \times n$ DLN은 두 흰색-검정 쌍이거나 혹은 검정-검정, 흰색-흰색 쌍을 연결하는 2-DPC가 존재함을 보인다. $k = 1$ 인 경우 1-DPC는 소스와 싱크를 잇는 해밀톤 경로와 일치한다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서는 몇몇 정의와 표기법을 다룬다. $m \times n$ DLN의 다대다 서로소인 경로 커버를 3절에서 설계하고, 4절에서 결론을 맺기로 한다.

2 정의와 표기법

$m \times n$ DLN의 정점 집합 V 는 $\{v_j^i \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ 이고, 에지 집합은 $E = E_r \cup E_r' \cup E_c \cup E_c'$ 이다. 여기서 $E_r = \{(v_j^i, v_{j+1}^i) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j < n\}$, $E_r' = \{(v_n^i, v_1^i) \mid 1 \leq i \leq m\}$, $E_c = \{(v_j^i, v_j^{i+1}) \mid 1 \leq i < m, 1 \leq j \leq n\}$, $E_c' = \{(v_j^1, v_j^m) \mid 1 \leq j < n\} \cup \{(v_n^1, v_n^m)\}$ 이다. $m \times n$ DLN의 예가 아래 그림 1에 있다. $E_r \cup E_r'$ 에 속한 에지를 *가로 에지*, $E_c \cup E_c'$ 에 속한 에지를 *세로 에지*, 그리고 $E_r' \cup E_c'$ 에 속한 에지를 *랩어라운드 (wraparound) 에지*라고 부른다. 세로 에지와 가로 에지의 점프 크기는 각각 1과 m 임을 관찰할 수 있다.

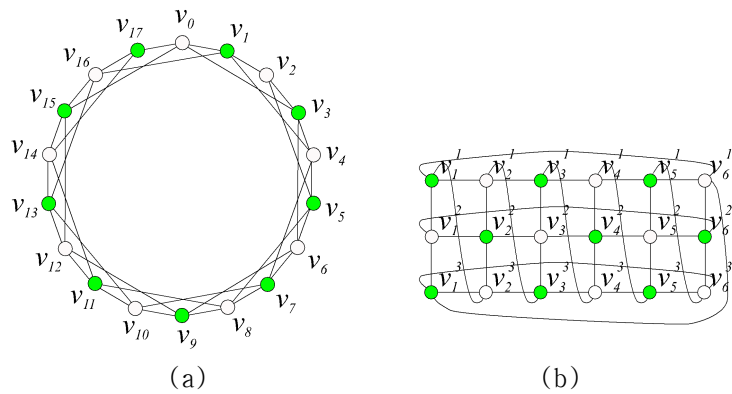


그림 1. 3×6 DLN, 혹은 다른 표기로 $G(18;1,3)$

$R(i)$ 와 $C(j)$ 를 각각 행 i 와 열 j 에 있는 정점들의 집합이라고 하자. 즉, $R(i) = \{v_j^i \mid 1 \leq j \leq n\}$ 이고, $C(j) = \{v_j^i \mid 1 \leq i \leq m\}$ 이다. $R(i, i')$ 을 $i \leq i'$ 이면 $\bigcup_{i \leq k \leq i'} R(k)$ 이고, 그렇지 않으면 공집합이라고 두자. 이와 유사하게 $C(j, j')$ 는 $j \leq j'$ 이면 $\bigcup_{j \leq k \leq j'} C(k)$ 이고, 그렇지 않으면 공집합이다. $m \times n$ DLN은 정점 대칭이고 에지 대칭은 아니다. 그렇지만, 한 쌍의 가로 에지 (v, w) 와 (v', w') 은 similar하다, 즉 $\phi(v) = v'$ 이고 $\phi(w) = w'$ 인 동형 사상 ϕ 가 존재한다. 한 쌍의 세로 에지도 similar하다.

$G\langle X \rangle - F$ 에서 한 쌍의 정점 v 와 w 를 잇는 해밀톤 경로를, 만약 존재한다면, $H[v, w; X]$ 로 나타내기로 한다. 여기서 $G\langle X \rangle$ 는 정점의 부분 집합 X 로 유도된(induced) G 의 부그래프를 말한다. 경로는 정점의 열로 표현한다. 만약 $G\langle X \rangle - F$ 가 정점을 하나도 가지지 않거나 혹은 v 와 w 사이에 해밀톤 경로가 존재하지 않는다면, $H[v, w; X]$ 는 원소의 수가 0인 열이 된다.

3 $m \times n$ DLN의 다대다 서로소인 경로 커버

이 절에서는 모든 $m \times n$ DLN, $m, n \geq 3$ 이 이분 그래프가 아니면 두 소스-싱크 쌍을 잇는 2-DPC를 가지며, 이분 그래프인 경우는 두 검정-흰색 쌍이나 혹은 검정-검정, 흰색-흰색 쌍을 잇는 2-DPC를 가지고 있음을 보이코자 한다. 정점이나 에지에 고장이 하나 있으면, 이러한 성질이 성립하지 않는다. 아래 그림 2에 있는 4×4 DLN에서 $s_1 = v_1^1$, $s_2 = v_4^1$, $t_1 = v_3^4$, $t_2 = v_1^4$ 일 때, 그림 (a)와 같이 v_1^2 이 고장이거나 그림 (b)와 같이 (v_1^1, v_2^4) 가 고장인 경우에 모두 2-DPC를 가지지 않는다.

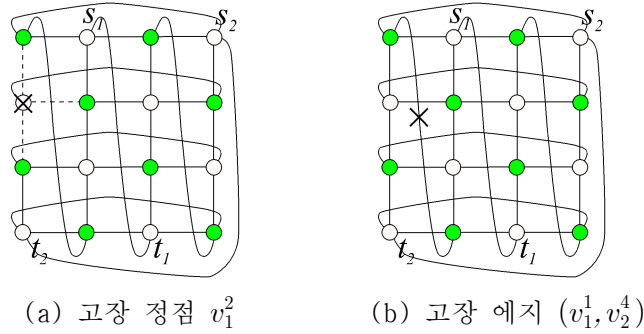


그림 2. 4×4 DLN

정점이나 에지에 고장이 없더라도 $m \times n$ DLN이 $m = 2$ 인 경우, 즉 $2 \times n$ DLN은 아래 그림 3과 같이 분지수가 4이고 이분 그래프가 아니지만 $s_1 = v_1^1$, $s_2 = v_2^1$, $t_1 = v_3^1$, $t_2 = v_4^1$ 로 주어질 때, 소스-싱크 쌍을 잇는 2-DPC는 존재하지 않게 된다.

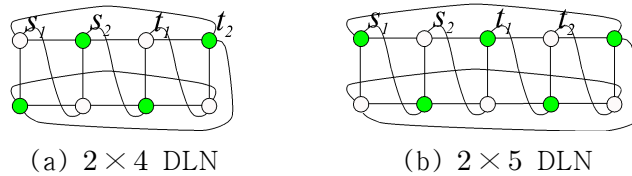


그림 3. $2 \times n$ DLN

아래 정리 1은 $m \times n$ DLN에서 2-DPC를 설계하기 위해서, $m \geq 9$ 이면 $m - 2 \times n$ DLN의 2-DPC를 이용하면 충분함을 의미한다. 그리고 정리 2는 $m \neq 7$ 이고 $n \geq 17$ 이면 $m \times n - 4$ DLN의 2-DPC를 이용하고, $m = 7$ 이고 $n \geq 25$ 이면 $m \times n - 6$ DLN의 2-DPC를 이용하여 $m \times n$ DLN에서 2-DPC를 설계할 수 있음을 의미한다. 이 두 정리를 증명하고 난 후에, $m \leq 8$ 이고 $n \leq 24$ (혹은 $n \leq 16$)인 나머지 경우에 2-DPC를 설계할 수 있음을 보이기로 한다.

정리 1 $m \times n$ DLN, $m \geq 5$, $n \geq 3$ 이 터미널을 포함하지 않고 연속한 두 행 $R(i)$, $R(i+1)$ 을 가지고 있으면, $m - 2 \times n$ DLN의 2-DPC를 이용하여 2-DPC를 설계할 수 있다.

정리 2 $m \leq 8$ 이라고 하자. $m \neq 7$ 일 때, $m \times n$ DLN, $m \geq 3$, $n \geq 7$ 에 터미널을 포함하지 않고 인접한 네 열 $C(j)$, $C(j+1)$, $C(j+2)$, $C(j+3)$ 이 있으면, $m \times n - 4$ DLN의 2-DPC를 이용하여 2-DPC를 설계할 수 있다. $m = 7$ 일 때는 위의 조건을 만족하는 여섯 개의 열이 있으면 $m \times n - 6$ DLN의 2-DPC를 이용하여 2-DPC를 설계할 수 있다.

3.1 정리 1의 증명

정리 1의 증명 $m - 2 \times n$ DLN이 이분 그래프가 아닐 때에는 임의의 두 소스-싱크 쌍을 잇는 2-DPC를 가지고 있다고 가정하고, 이분 그래프인 경우는 두 검정-흰색 쌍이나 혹은 검정-검정, 흰색-흰색 쌍을 잇는 2-DPC를 가지고 있다고 가정한다. 일반성을 잃지 않고, $2 \leq i < i+1 \leq m-1$ 이라고 가정한다. $m \times n$ DLN에서 i 번째 행과 $i+1$ 번째 행을 제거하고, $i-1$ 행과 $i+2$ 행을 잇는 에지 $X = \{(v_j^{i-1}, v_j^{i+2}) | 1 \leq j \leq n\}$ 를 추가하여 $m - 2 \times n$ DLN을 구성한 다음, 주어진 소스-싱크 쌍을 잇는 2-DPC를 찾는다. 이때 추가된 에지들을 *가상 에지*라고 부른다. 2-DPC가 $r > 0$ 개의 가상 에지 $\{(v_{j_p}^{i-1}, v_{j_p}^{i+2}) | 1 \leq p \leq r\}$, $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ 을 포함한다면, 모든 p 에 대하여 2-DPC가 지나가는 가상 에지 $(v_{j_p}^{i-1}, v_{j_p}^{i+2})$ 를 $H[v_{j_p}^i, v_{j_p}^{i+1} | Y_{j_p}]$ 로 교체하면 충분하다. 여기서 $Y_{j_i} = R(i, i+1) \cap [C(1, i_1) \cup C(i_r+1, n)]$ 이고 $Y_{j_p} = R(i, i+1) \cap C(i_{p-1}+1, i_p)$, $2 \leq p \leq r$ 이다. 만약 2-DPC가 가상 에지를 지나지 않는다면, 2-DPC는 반드시 $i-1$ 행이나 $i+2$ 행에 있는 에지를 하나 이상 지난다. 왜냐하면, 그렇지 않다고 가정하면 $i-1$ 행과 $i+2$ 행에 있는 모든 정점이 터미널이어야 하기 때문이다. $i-1$ 행에 있는 에지 $(v_j^{i-1}, v_{j+1}^{i-1})$ 을 지난다고 하자. $(v_j^{i-1}, v_{j+1}^{i-1})$ 을 $H[v_j^i, v_{j+1}^i | R(i, i+1)]$ 로 교체함으로써 $m \times n$ DLN의 2-DPC를 얻을 수 있다. $i+2$ 행에 있는 두 정점을 잇는 에지를 지나는 경우도 마찬가지로 2-DPC를 얻을 수 있다. □

3.2 정리 2의 증명

정리 2를 증명하기 위하여 정리 1의 증명에서와 마찬가지로, $m \neq 7$ 일 경우에는 $m \times n - 4$ DLN이 그리고 $m = 7$ 일 경우에는 $m \times n - 6$ DLN이 이분 그래프가 아닐 때에는 임의의 두 소스-싱크 쌍에 대해서 2-DPC를 가지고 있다고 가정하고, 이분 그래프일 때에는 두 검정-흰색 쌍이나 혹은 검정-검정, 흰색-흰색 쌍을 잇는 2-DPC를 가지고 있다고 가정한다. 증명을 간단히 기술하기 위해서, $m \neq 7$ 일 경우를 중심으로 기술하기로 한다. $m = 7$ 일 경우는 따로 언급하지 않으면 $m \neq 7$ 일 때의 설계가 쉽게 확장되어 적용된다. 일반성을 잃지 않고, $2 \leq j < \dots < j+3 \leq n-2$ 이라고 가정한다. $m \times n$ DLN에서 j , $j+1$, $j+2$, $j+3$ 번째 열을 제거하고, $j-1$ 열과 $j+4$ 열을 잇는 가상 에지 $Y = \{(v_{j-1}^i, v_{j+4}^i) | 1 \leq i \leq m\} \cup \{(v_{j+4}^m, v_{j-1}^1)\}$ 를 추가하여 $m \times n - 4$ DLN을 구성한 다음, 주어진 소스-싱크 쌍을 잇는 2-DPC를 찾는다. $m \times n - 4$ DLN의 2-DPC가 지나가는

가상 에지의 수 r 에 따라 다음과 같이 세 경우로 나누어 증명한다:

경우 1 $r = 0$;

경우 2 $r = 1$;

경우 3 $r \geq 2$.

경우 1의 증명 만약 2-DPC가 $j-1$ 열이나 $j+4$ 열에 속한 세로 에지들 중 하나를 지난다면, 그 세로 에지 (v_k^i, v_k^{i+1}) , $k = j-1, j+4$ 를 $H[v_k^i, v_k^{i+1} | C(j, j+3)]$, $k' = j, j+3$ 으로 대체하면 $m \times n$ DLN의 2-DPC를 구할 수 있다. $j-1$ 열이나 $j+4$ 열에 2-DPC가 지나가는 세로 에지가 존재하지 않는다면, v_{j-1}^m 을 제외한 $j-1$ 열의 모든 정점과 v_{j+4}^1 를 제외한 $j+4$ 열의 모든 정점이 터미널이 된다. 따라서 $m \geq 4$ 인 경우는 증명이 끝났고, $m = 3$ 일 때 2-DPC는 다음과 같다. 일반성을 잃지 않고, $j = 2$ 라고 하자.

$$s_1 = v_1^1, t_1 = v_1^2: P_1 = (s_1, t_1), P_2 = (v_6^3, H[v_5^1, v_2^3 | C(2, 5)], v_1^3, H[v_n^1, v_6^2 | C(6, n) - v_6^3]);$$

$$s_1 = v_1^1, t_1 = v_6^3: P_1 = (s_1, H[v_2^3, v_5^1 | C(2, 5)], t_1), P_2 = (H[v_6^2, v_n^1 | C(6, n) - t_1], v_1^3, v_1^2);$$

$$s_1 = v_1^1, t_1 = v_6^2: P_1 = (s_1, H[v_2^3, v_5^1 | C(2, 5)], v_6^1, t_1), P_2 = (v_6^3, H[v_7^3, v_n^1 | C(7, n)], v_1^3, v_1^2). \square$$

경우 2의 증명 $m \times n - 4$ DLN의 2-DPC가 가상 에지 (v_{j+4}^m, v_{j-1}^1) 을 지난다면, 이 에지를 $(H[v_j^1, v_{j+1}^1 | C(j, j+1)], H[v_{j+2}^1, v_{j+3}^1 | C(j+2, j+3)])$ 로 대체하여 $m \times n$ DLN의 2-DPC를 얻을 수 있다. 이제 가상 에지 (v_{j-1}^i, v_{j+4}^i) 를 지난다고 하자. 먼저 m 이 짝수인 경우를 고려하기로 한다. i 가 홀수이면 $R(i, i+1) \cap C(j, j+3)$ 을 지나가는 경로 $P_i = (v_j^i, v_j^{i+1}, v_{j+1}^{i+1}, v_{j+1}^i, v_{j+2}^i, v_{j+2}^{i+1}, v_{j+3}^{i+1}, v_{j+3}^i)$ 를, i 가 짝수이면 $R(i-1, i) \cap C(j, j+3)$ 에 속한 모든 정점을 지나도록 경로 $P_i = (v_j^i, v_j^{i-1}, v_{j+1}^{i-1}, v_{j+1}^i, v_{j+2}^i, v_{j+2}^{i-1}, v_{j+3}^{i-1}, v_{j+3}^i)$ 를 설계한다. P_i 는 i 가 홀수이면 행 $i, i+1$ 에 속한 에지를 각각 하나 이상 지나고, i 가 짝수이면 행 $i-1, i$ 에 속한 에지를 지난다는 것을 관찰한다. P_i 를 확장하여 $C(j, j+3)$ 에 있는 다른 정점도 지나도록 설계하고자 한다. $C(j, j+3)$ 에 속한 행을 연속한 두 행씩 짝을 지어 나눈 다음, P_i 를 구한다. P_i 가 에지 (v_k^i, v_{k+1}^i) 을 지난다고 하면 이 에지를 행 i 와 인접한 두 행을

$$\text{지나는} \quad H[v_k^{i-1}, v_{k+1}^{i-1} | R(i-2, i-1) \cap C(j, j+3)] \text{나}$$

$$H[v_k^{i+1}, v_{k+1}^{i+1} | R(i+1, i+2) \cap C(j, j+3)] \text{로 교체한다. 이 과정을 계속하면 } C(j, j+3) \text{의}$$

정점을 모두 지나도록 P_i 를 확장할 수 있다.

이제 m 이 홀수일 때를 고려한다. $C(k, k+1)$ 의 정점을 모두 지나가는 해밀톤 사이클 $(v_k^1, v_{k+1}^1, v_{k+1}^2, v_k^2, \dots, v_k^m, v_{k+1}^m)$ 이 존재하므로, 임의의 i 에 대하여 v_k^i 와 v_{k+1}^i 을 지나가는 해밀톤 경로도 존재한다. $m \times n - 4$ DLN의 2-DPC가 가상 에지 (v_{j-1}^i, v_{j+4}^i) 를 지난다고 하자. 가상 에지를 $H[v_j^i, v_{j+1}^i | C(j, j+1)]$ 과 $H[v_{j+2}^i, v_{j+3}^i | C(j+2, j+3)]$ 으로 교체하면 우리가 원하는 $m \times n$ DLN의 2-DPC가 된다. \square

경우 3의 증명 $m \times n - 4$ DLN의 2-DPC가 둘 이상의 가상 에지를 지나가는 경우를 고려한

다. 일반성을 잃지 않고, v_{j-1}^1 을 터미널이라고 가정한다. 먼저 가상 에지 (v_{j+4}^m, v_{j-1}^1) 을 지난다면, 2-DPC가 지나는 다른 가상 에지를 $(v_{j-1}^{i_1}, v_{j+4}^{i_1}), (v_{j-1}^{i_2}, v_{j+4}^{i_2}), \dots, (v_{j-1}^{i_k}, v_{j+4}^{i_k})$ 라고 하자. v_{j-1}^1 이 터미널이므로 $i_1 \geq 2$ 이다. 그러면 $i_{k+1} = m + 1$ 이라 할 때, 가상 에지 (v_{j+4}^m, v_{j-1}^1) 를 $H[v_j^1, v_{j+3}^1 | R(1, i_1 - 1) \cap C(j, j + 3)]$ 으로 대체하고, 남은 각 가상 에지 $(v_{j-1}^{i_p}, v_{j+4}^{i_p})$ 를 $H[v_j^{i_p}, v_{j+3}^{i_p} | R(i_p, i_{p+1} - 1) \cap C(j, j + 3)]$ 으로 교체하면 된다. 이제 $m \times n - 4$ DLN의 2-DPC가 가상 에지 (v_{j+4}^m, v_{j-1}^1) 을 지나지 않고, 가상 에지 $(v_{j-1}^{i_1}, v_{j+4}^{i_1}), (v_{j-1}^{i_2}, v_{j+4}^{i_2}), \dots, (v_{j-1}^{i_k}, v_{j+4}^{i_k}), k \geq 2$ 를 지난다고 하자. 연속된 가상 에지를 지나면, 즉 어떤 p 에 대하여 $i_p + 1 = i_{p+1}$ 이라면, $i_0 = 0$ 이라고 할 때, $q \leq p$ 인 가상 에지 $(v_{j-1}^{i_q}, v_{j+4}^{i_q})$ 를 $H[v_j^{i_q}, v_{j+3}^{i_q} | R(i_{q-1} + 1, i_q) \cap C(j, j + 3)]$ 으로 교체하고, $q \geq p + 1$ 인 가상 에지 $(v_{j-1}^{i_q}, v_{j+4}^{i_q})$ 를 $H[v_j^{i_q}, v_{j+3}^{i_q} | R(i_q, i_{q+1} - 1) \cap C(j, j + 3)]$ 으로 교체하면 충분하다. 앞으로 연속된 가상 에지는 존재하지 않는다고 가정한다. m 이 짝수일 때는 경우 2의 증명과 같은 방식으로 연속된 두 행씩 묶은 다음, i_q 가 홀수냐 짝수냐에 따라서 $P_{i_q}, 1 \leq q \leq k$ 를 설계한 다음 이것들을 연속된 다른 두 행에 속한 정점을 지나도록 확장함으로써 $C(j, j + 3)$ 의 모든 정점을 지나도록 설계할 수 있다. 이제 m 이 홀수인 경우를 생각한다. $m = 3$ 이면 연속된 가상 에지가 나타날 수밖에 없으니 증명이 끝났다. $m = 5$ 이면 연속된 가상 에지가 없는 경우는 $i_1 = 2, i_2 = 4$ 인 두 가상 에지를 지나는 경우인데, 다음과 같이 두 경로를 설계한다(그림 4(a) 참조):

$$P_1 = (v_j^2, v_j^3, v_{j+1}^3, v_{j+1}^4, v_{j+2}^4, v_{j+2}^5, v_{j+3}^5, v_{j+2}^1, v_{j+3}^1, v_{j+3}^2);$$

$$P_2 = (v_j^4, v_j^5, v_{j+1}^5, v_j^1, v_{j+1}^1, v_{j+1}^2, v_{j+2}^2, v_{j+2}^3, v_{j+3}^3, v_{j+3}^4).$$

$m = 7$ 일 때는 $m \times n - 4$ DLN의 2-DPC가 지나는 가상 에지의 수가 2인 경우는, m 이 홀수이지만, 연속된 행을 둘, 혹은 셋씩 묶어서 반드시 2-DPC가 지나는 가상 에지는 다른 그룹에 속하도록 할 수 있다. 그리고 나서 m 이 짝수일 때와 마찬가지로 2-DPC 지나는 가상 에지를 경로 P_i 들로 교체하고, 그것들을 연속된 행들의 묶음으로 확장하면 된다. 마지막으로 2-DPC가 세 개의 가상 에지를 지나고 그들이 연속적이지 않을 때가 있다. 이 때 $i_1 = 2, i_2 = 4, i_3 = 6$ 인 행을 잇는 가상 에지가 포함될 경우인데, 터미널이 포함되지 않는 연속된 열의 수가 6이라고 가정하여 $C(j, j + 5)$ 의 정점을 모두 지나도록 다음과 같이 세 경로를 설계한다(그림 4(b) 참조):

$$P_1 = (v_j^2, v_j^3, v_{j+1}^3, v_{j+1}^4, v_{j+2}^4, v_{j+2}^5, v_{j+3}^5, v_{j+3}^6, v_{j+4}^6, v_{j+4}^7, v_{j+5}^7, v_{j+4}^1, v_{j+5}^1, v_{j+5}^2);$$

$$P_2 = (v_j^4, v_j^5, v_{j+1}^5, v_{j+1}^6, v_{j+2}^6, v_{j+2}^7, v_{j+3}^7, v_{j+2}^1, v_{j+3}^1, v_{j+3}^2, v_{j+4}^2, v_{j+4}^3, v_{j+5}^3, v_{j+5}^4);$$

$$P_3 = (v_j^6, v_j^7, v_{j+1}^7, v_j^1, v_{j+1}^1, v_{j+1}^2, v_{j+2}^2, v_{j+2}^3, v_{j+3}^3, v_{j+3}^4, v_{j+4}^4, v_{j+4}^5, v_{j+5}^5, v_{j+5}^6). \quad \square$$

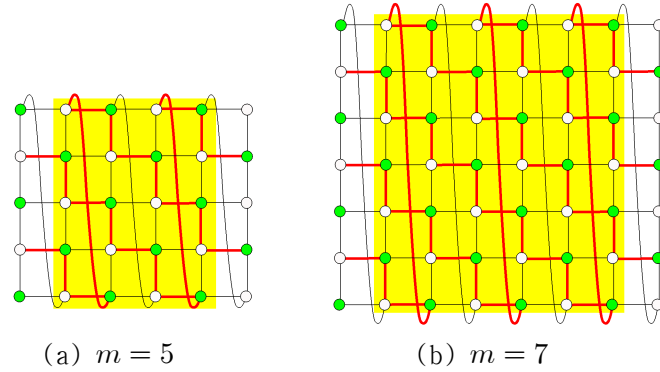


그림 4. $m \times n$ DLN의 2-DPC

3.3 $m \leq 8$ 이고 $n \leq 24$ 인 경우 $m \times n$ DLN의 2-DPC

이제 $3 \leq m \leq 8$ 이고 $3 \leq n \leq 16$ 혹은 $m = 7$ 이고 $3 \leq n \leq 24$ 인 경우에 $m \times n$ DLN에서 2-DPC를 설계하는 문제를 고려한다. $m \times n$ DLN이 이분 그래프가 아닌 경우는 임의의 두 소스-싱크 쌍을 연결하는 2-DPC가 존재함을 보이고, 이분 그래프인 경우는 두 검정-흰색 쌍이나 혹은 검정-검정, 흰색-흰색 쌍을 잇는 2-DPC가 존재함을 보인다. 여기서 유한한 $92 (= 5 \times 14 + 22)$ 개의 서로 다른 DLN이 이분 그래프이냐 아니냐에 따라서 2-DPC를 설계할 수 있음을 보이면 충분하다.

많은 경우는 앞에서 증명한 정리 1과 2를 이용하여 $m-2 \times n$ DLN, $m \times n-4$ DLN 혹은 $m \times n-6$ DLN의 2-DPC를 이용하여 $m \times n$ DLN의 2-DPC를 설계할 수 있다. 나머지 경우에는, $m \times n$ DLN의 대칭성과 함께 아래 보조 정리에서 보인 것과 같이 사각 그리드(rectangular grid) $P_m \times P_n$ 과 경로와 사이클의 곱 $P_m \times C_n$ 의 고장 해밀톤 성질을 이용하면 모두 2-DPC를 설계할 수 있다. $m \times n$ DLN은 $P_m \times P_n$ 과 $P_m \times C_n$ 을 스페닝 부 그래프로 가진다. 사각 그리드에서 분지수가 2인 정점을 꼭지 정점이라고 한다. 경우의 수가 많아서 컴퓨터 프로그램을 작성하여 확인하였고, 그 경우를 모두 나열하지는 않고 생략하기로 한다.

보조정리 1 [16] G 를 사각 그리드 $P_m \times P_n$, $m, n \geq 2$ 이라고 하자.

- (a) mn 이 짝수일 때, G 는 임의의 꼭지 정점 v 로부터 v 와 다른 색을 가진 임의의 정점까지 해밀톤 경로를 갖는다.
- (b) mn 이 홀수일 때, G 는 임의의 꼭지 정점 v 로부터 v 와 같은 색을 가진 임의의 정점까지 해밀톤 경로를 갖는다.

보조정리 2

- (a) $P_m \times C_n$, $m \geq 2$, $n \geq 3$ 인 홀수는 (0-고장) 해밀톤 연결된 그래프이다[14,17].
- (b) $P_m \times C_n$, $m \geq 2$, $n \geq 4$ 인 짝수는 1-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프이다[18].

4 결론

이 논문에서는 $m \times n$ DLN, $m, n \geq 3$ 이 2-DPC를 가지는가하는 문제를 고려하여, 이분 그래프가 아닌 경우는 임의의 두 소스-싱크 쌍을 잇는 2-DPC가 존재함을 보였고, 이분 그래프인 경우는 두 검정-흰색 쌍이나 혹은 검정-검정, 흰색-흰색 쌍을 잇는 2-DPC가 존재함을 보였다. $m \times n$ DLN이 이분 그래프일 때, 증명하지 않은 나머지 경우에 대해서는 검정 정점의 수와 흰색 정점의 수가 같기 때문에 2-DPC가 존재할 수 없다.

참고문헌

- [1] J.-H. Park, "One-to-one disjoint path covers in recursive circulants," *Journal of KISS* **30(12)**, pp. 691-698, 2003.
- [2] C.-H. Tsai, J.J.M. Tan, and L.-H. Hsu, "The super-connected property of recursive circulant graphs," *Inform. Proc. Lett.* **91(6)**, pp. 293-298, 2004.
- [3] C.-H. Chang, C.-K. Lin, H.-M. Huang, and L.-H. Hsu, "The super laceability of the hypercubes," *Inform. Proc. Lett.* **92(1)**, pp. 15-21, 2004.
- [4] J.-H. Park, "One-to-many disjoint path covers in a graph with faulty elements," in *Proc. of the International Computing and Combinatorics Conference COCOON 2004*, pp. 392-401, Aug. 2004.
- [5] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Many-to-many disjoint path covers in a graph with faulty elements," in *Proc. of the International Symposium on Algorithms and Computation ISAAC 2004*, pp. 742-753, Dec. 2004.
- [6] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Many-to-many disjoint path covers in hypercube-like interconnection networks with faulty elements," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, 2005 (to appear).
- [7] C.-y. Chou, D.J. Guan, and K.-l. Wang, "A dynamic fault-tolerant message routing algorithm for double-loop networks," *Inform. Proc. Lett.* **70(6)**, pp. 259-264, 1999.
- [8] D.J. Guan, "An optimal message routing algorithm for double-loop networks," *Inform. Proc. Lett.* **65(5)**, pp. 255-260, 1998.
- [9] T.-Y. Sung, C.-Y. Lin, Y.-C. Chuang, and L.-H. Hsu, "Fault tolerant token ring embedding in double loop networks," *Inform. Proc. Lett.* **66**, pp. 201-207, 1998.
- [10] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Fault-hamiltonicity of hypercube-like interconnection networks," in *Proc. of the IEEE International Parallel & Distributed Processing Symposium IPDPS 2005*, Apr. 2005.
- [11] A. Sengupta, "On ring embedding in hypercubes with faulty nodes and links,"

- Inform. Proc. Lett.* **68**, pp. 207–214, 1998.
- [12] Y.-C. Tseng, S.-H. Chang, and J.-P. Sheu, "Fault-tolerant ring embedding in a star graph with both link and node failures," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems* **8(12)**, pp. 1185–1195, Dec. 1997.
- [13] J.-H. Park and H.-C. Kim, "Fault hamiltonicity of double loop networks $G(mn;1,m)$ with even m and n ," *Journal of KISS* **27(10)**, pp. 868–879, 2000.
- [14] C.-H. Tsai, J.J.M. Tan, Y.-C. Chuang, and L.-H. Hsu, "Fault-free cycles and links in faulty recursive circulant graphs," in *Proc. of Workshop on Algorithms and Theory of Computation ISC2000*, pp. 74–77, 2000.
- [15] J.-H. Park, "Fault-hamiltonicity of bipartite double loop networks," *Journal of KISS* **31(1)**, pp. 19–26, 2004.
- [16] C.C. Chen and N.F. Quimpo, "On strongly hamiltonian abelian group graphs," in *Australian Conference on Combinatorial Mathematics (Lecture Notes in Mathematics #884)*, pp. 23–34, 1980.
- [17] H.-C. Kim and J.-H. Park, "Fault hamiltonicity of two-dimensional torus networks," in *Proc. of Workshop on Algorithms and Computation WAAC'00*, Tokyo, Japan, pp. 110–117, 2000.
- [18] J.-H. Park and H.-C. Kim, "Fault-hamiltonicity of product graph of path and cycle," in *Proc. of International Computing and Combinatorics Conference COCOON2003 (LNCS #2697)*, MT, USA, pp. 319–328, 2003.