

하나의 정점 고장을 가진 2-차원 이분 토러스에서 다대다 서로소인 경로 커버

김 호동, 박 정흠

가톨릭대학교 컴퓨터공학과
420-743 경기도 부천시 원미구 역곡 2동 산 43-1
geol5@nate.com, j.h.park@catholic.ac.kr
전화 (02) 2164-{4799, 4366}, 팩스 (02) 2164-4777

Many-to-Many Disjoint Path Covers in Two-Dimensional Bipartite Tori with a Single Vertex Fault

Ho-Dong Kim and Jung-Heum Park

Department of Computer Science
The Catholic University of Korea
Yokkok 2-dong 43-1, Wonmi-gu, Puchon City, Kyonggi-do 420-743
geol5@nate.com, j.h.park@catholic.ac.kr
TEL (02) 2164-{4799, 4366}, FAX (02) 2164-4777

하나의 정점 고장을 가진 2-차원 이분 토러스에서 다대다 서로소인 경로 커버

(Many-to-Many Disjoint Path Covers in Two-Dimensional Bipartite Tori with a Single Vertex Fault)

요약 그래프의 쌍형 다대다 k -서로소인 경로 커버(k -DPC)는 k 개의 서로 다른 소스-싱크 쌍을 연결하면서 그래프에 있는 모든 정점을 지나는 k 개의 서로소인 경로 집합을 말한다. 2-차원 $m \times n$ 토러스는 길이가 각각 m 과 n 인 두 사이클 C_m 과 C_n 의 곱으로 정의되는 그래프이다. 이 논문은 고장 정점을 하나 가진 $m \times n$ 이분 토러스(짝수 $m, n \geq 4$)를 고려하여, 다음과 같이 이 토러스가 주어진 두 소스-싱크 쌍을 잇는 쌍형 다대다 2-DPC를 가질 필요충분조건을 제시한다: 네 개의 소스와 싱크 중에서 정확히 하나가 고장 정점과 같은 색이다.

키워드 : 토러스, 이분 그래프, 서로소인 경로, 경로 커버, 고장 감내

Abstract A paired many-to-many k -disjoint path cover (k -DPC for short) of a graph is a set of k disjoint paths joining k distinct source-sink pairs in which each vertex of the graph is covered by a path. A two-dimensional $m \times n$ torus is a graph defined as the product of two cycles C_m and C_n of length m and n , respectively. In this paper, we deal with an $m \times n$ bipartite torus, even $m, n \geq 4$, with a single faulty vertex, and present a necessary and sufficient condition for the torus to have a paired many-to-many 2-DPC connecting given two source-sink pairs as follows: Out of the four sources and sinks, exactly one of them has the same color as the faulty vertex.

Key words : Torus, bipartite graph, disjoint paths, path covers,
fault tolerance

1. 서 론

상호 연결망(interconnection networks)에서 노드들 사이의 라우팅이나 선형 배열의 임베딩 등과 관련하여 다루는 중요한 문제 중의 하나는 노드가 서로소인 경로(node-disjoint paths)를 찾는 것이다. 노드가 서로소인 경로는 노드들 사이에 효율적인 데이터 라우팅을 위한 병렬 경로로 사용될 수 있다. 또한 노드가 서로소인 경로에서 각 경로는 파이프라인 계산에 이용될 수 있다. 상호연결망은 자주 그래프로 모델 되는데, 정점과 에지는 각각 노드와 통신 링크에 대응한다. 이 논문에서는 노드가 서로소인 경로를 간단히 서로소인 경로라고 부르기로 한다.

서로소인 경로는 소스(source)와 싱크(sink)의 개수에 따라 일대일(one-to-one), 일대다(one-to-many), 그리고 다대다(many-to-many)로 분류할 수 있다. 세 유형의 서로소인 경로가 그래프 G 에 있는 모든 정점을 지나는 경우를 생각해 볼 수 있다. 서로소인 경로 커버(disjoint path cover; DPC)는 그래프의 모든 정점을 중복하지 않고 지나는 경로들의 집합을 말한다. 서로소인 경로 커버에 대한 문제는 모든 노드를 완전히 활용하는 것이 중요한 응용과 관련된다[1]. 선형 배열의 임베딩에서 커버는 모든 노드가 파이프라인 계산에 참여한다는 것을 의미한다. 세 유형 중에서 다대다 서로소인 경로 커버를 찾는 문제가 가장 일반화된 것이며, 이 논문에서는 다대다 서로소인 경로 커버를 다룬다.

그래프 G 에서 $S \cap T = \emptyset$ 을 만족하는 k 개의 소스 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ 와 k 개의 싱크 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ 가 주어져 있을 때, 소스와 싱크를 잇는 경로 $P_i (1 \leq i \leq k)$ 들의 집합이 서로소이면서 그래프의 모든 정점을 지나면, 즉 모든 $i \neq j$ 에 대하여 $V(P_i) \cap V(P_j) = \emptyset$ 이고 $\cup_{1 \leq i \leq k} V(P_i) = V(G)$ 이면 이들 경로들의 집합을 다대다 k -서로소인 경로 커버(many-to-many k -DPC)라고 부른다. 여기서 $V(P_i)$ 는 경로 P_i 에 속한 정점들의 집합이고, $V(G)$ 는 그래프 G 의 정점 집합이다. 이때 소스 s_i 가 항상 싱크 t_i 와 짝지어지면 쌍형(paired) 다대다 DPC라고 부르고, 하나의 소스가 임의의 한 싱크와 짝지어질 수 있으면 비쌍형(unpaired) 다대다 DPC라고 한다. 소스와 싱크를 터미널(terminal)이라고 부른다.

일반적인 그래프에서 임의의 고정된(fixed) $k \geq 1$ 에 대하여 일대일, 일대다, 혹은 다대다 k -DPC가 존재하는가를 묻는 문제는 모두 NP-완전(NP-complete)임이 알려져 있다[1,2]. 제한된 HL-그래프(restricted HL-graphs)라고 부르는, 이분 그래프가 아닌 하이퍼큐브형 상호연결망에 대한 쌍형 다대다 DPC[1,2], 비쌍형 다대다 DPC[3]가 연구되었다. 이분 그래프인 하이퍼큐브의 쌍형 다대다 DPC[4]와 정점 고장을 허용하는 하이퍼큐브의 쌍형 다대다 DPC[5]에 대한 연구가 있고, 에지 고장을 허용하는 하이퍼큐브에서 비쌍형 다대다 DPC[6]와 하이퍼큐브에 에지를 추가한 이분 그래프에 대한 비쌍형 다대다 DPC[7]에 대한 연구가 발표되어 있다. 최근에 재귀원형군(recursive circulants) $G(2^m, 4)$ 에는 $f + k \leq m - 1$ 을 만족하는 임의의 f , $k \geq 2$, $m \geq 5$ 에 대하여 비쌍형 다대다 k -DPC가 존재한다고 밝혀졌다[8]. 서로소인 경로 커버에 대한 기본적인 성질 및 앞서 언급한 것 이외의 관련 연구는 [1,2]를 참조한다.

2-차원 $m \times n$ 토러스는 두 사이클 C_m 과 C_n 의 곱 $C_m \times C_n$ 으로 정의된다. 즉, 정점 집합은 $V = \{v_j^i : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ 이고 에지 집합은 $E = E_r \cup E_c \cup E_{r'} \cup E_{c'}$ 이다. 여기서 $E_r = \{(v_j^i, v_{j+1}^i) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j < n\}$, $E_c = \{(v_j^i, v_j^{i+1}) : 1 \leq i < m, 1 \leq j \leq n\}$, $E_{r'} = \{(v_n^i, v_1^i) : 1 \leq i \leq m\}$, $E_{c'} = \{(v_j^m, v_j^1) : 1 \leq j \leq n\}$ 이다. 그림 1은 $m \times n$ 토러스의 예를 보여준다. $m \times n$ 토러스에서 $E_r \cup E_{r'}$ 에 속한 에지를 가로 에지, $E_c \cup E_{c'}$ 에 속한 에지를 세로 에지, 그리고 $E_{r'} \cup E_{c'}$ 에 속한 에지를 랩어라운드 에지(wraparound edge)라고 부른다.

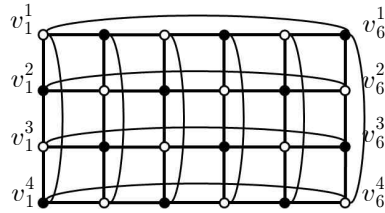


그림 1. 4×6 토러스.

토러스에서 서로소인 경로 커버에 대한 연구는 다음과 같은 것들이 있다. 2-차원 $m \times n$ 토러스가 이분 그래프일 때, 임의의 두 소스와 두 싱크에 대하여 네 터미널 중에서 검정 터미널이 둘이고 흰색 터미널이 둘이면 쌍형 2-DPC가 존재함이 증명되었고[9], 이분 그래프가 아닐 때 쌍형 2-DPC가 항상 존재함은 [10]에서 증명되었다. 고차원 토러스에 대한 연구도 있다. d -차원 토러스의 일대일 서로소인 경로 커버는 [11]에서 연구되었는데, 이분 그래프가 아닌 d -차원 토러스는 $1 \leq k \leq 2d$ 를 만족하는 임의의 k 에 대하여 임의의 소스-싱크 쌍을 잇는 일대일 k -DPC가 존재함이 증명되었다. 또한 정점이나 에지 고장을 허용하는 d -차원 토러스에서 고장 요소(정점이나 에지)의 수가 f 개 이하라고 할 때, 이분 그래프가 아니면 $f + 2k \leq 2d - 1$ 을 만족하는 임의의 f , $k \geq 1$ 에 대하여 쌍형 k -DPC를 가진다고 알려져 있다[12].

이분 그래프 G 의 흰색 정점의 집합을 W , 검정 정점의 집합을 B , 그리고 고장 요소의 집합을 F 라고 하자. $|W| = |B|$ 일 때, G 의 터미널과 고장 정점에 대한 균형 인자(balance factor)를 다음과 같이 정의한다:

$$bf(SU \ T \ U \ F) = (|B \cap (SU \ T)| + 2f_v^b) - (|W \cap (SU \ T)| + 2f_v^w)$$

여기서 f_v^b 는 검정 고장 정점의 수, f_v^w 는 흰색 고장 정점의 수를 나타낸다. $|W| = |B|$ 인 이분 그래프에서 균형인자가 0이 아니면 서로소인 경로 커버가 존재할 수 없음을 관찰할 수 있다.

이 논문에서는 $m, n (m, n \geq 4)$ 이 모두 짝수인 $m \times n$ 이분 토러스에 균형 인자 $bf(SU \ T \ U \ F) = 0$ 을 만족하도록 고장 요소 하나와 서로 다른 소스 s_1, s_2 와 싱크 t_1, t_2 가 주어지면, 항상 이들을 잇는 쌍형 2-DPC를 설계할 수 있음을 증명한다. 다시 말하면, 균형 인자가 0이라는 필요조건이 고장을 하나 가진 $m \times n$ 이분 토러스가 쌍형 2-DPC를 가질 필요충분조건이 됨을 보인다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 먼저 2절에서는 몇몇 용어 및 표기법에 대해 기술한다. 3절에서는 $m \times n$ 토러스의 서로소인 경로 커버를 설계할 때 활용하기 위하여 경로와 사이클의 곱 그래프의 서로소인 경로 커버 성질을 고찰한다. 이 성질을 이용하여 4절에서 $m \times n$ 이분 토러스에서 고장 정점이 하나일 때 쌍형 2-DPC를 가질 필요충분조건을 증명하고, 5절에서 결론을 기술한다.

2. 용어 및 표기법

$m \times n$ 토러스는 m 과 n 이 모두 짝수이면 *이분 그래프(bipartite graph)*가 되고, 그렇지 않으면 이분 그래프가 아니다. 이분 그래프는 인접한 모든 정점 쌍이 다른 색이 되도록 정점을 검정색과 흰색으로 색칠할 수 있는 그래프를 말한다. $m \times n$ 토러스의 행 i 와 열 j 에 있는 정점들의 집합을 각각 $R(i)$ 와 $C(j)$ 라고 하자. 즉, $R(i) = \{v_j^i : 1 \leq j \leq n\}$ 이고 $C(j) = \{v_i^j : 1 \leq i \leq m\}$ 이다. $R(i:j)$ 는 $i \leq j$ 이면 $\cup_{i \leq k \leq j} R(k)$ 이고, 그렇지 않으면 공집합이라고 정의한다. $C(i:j)$ 도 마찬가지로 정의한다.

$m \times n$ 토러스에서 임의의 가로 에지 쌍 $(v,w), (x,y)$ 는 서로 *유사(similar)*하다. 즉, $h(v) = x$ 이고 $h(w) = y$ 인 동형사상(isomorphism) h 가 존재한다. 임의의 두 세로 에지 쌍도 유사하다. 또한 임의의 i, j 에 대하여 $f(v_j^i) = v_j^{m-i+1}$ 을 만족하는 동형 사상 f 가 존재하며, 임의의 i 에 대하여 $g(v_1^i) = v_1^i$ 이고 $2 \leq j \leq n$ 에 대하여 $g(v_j^i) = v_{n-j+2}^i$ 인 동형 사상 g 가 존재한다.

*해밀톤 경로(hamiltonian path)*는 그래프의 모든 정점을 지나는 경로이고, *해밀톤 사이클(hamiltonian cycle)*은 모든 정점을 지나는 사이클이다. 임의의 정점 쌍을 잇는 해밀톤 경로가 존재하는 그래프를 *해밀톤 연결된(hamiltonian-connected)* 그래프라고 한다. 해밀톤 연결되었다는 것과 임의의 소스와 싱크를 잇는 (어떤 유형이든) 1-DPC가 존재한다는 것은 서로 동치이다.

N 개의 정점을 가지는 이분 그래프 G 에서 $|W| = |B|$ 일 때, $f_v^b = f_v^w$ 이면 다른 색을 가진 두 정점을 잇는 길이 $N - 2f_v^b - 1$ 인 경로를 L^{opt} -경로라고 하고, 같은 색을 가진 두 정점을 잇는 길이 $N - 2f_v^b - 2$ 인 경로를 L^{opt} -경로라고 한다. $f_v^w < f_v^b$ 일 때는 두 흰색 정점을 잇는 길이 $N - 2f_v^b$ 인 경로, 서로 다른 색을 가진 정점 사이의 길이 $N - 2f_v^b - 1$ 인 경로, 두 검정 정점을 잇는 길이 $N - 2f_v^b - 2$ 인 경로를 L^{opt} -경로라고 한다. 그리고 길이 $N - 2 \cdot \max\{f_v^b, f_v^w\}$ 인 사이클을 L^{opt} -사이클이라고 한다.

$|W| = |B|$ 인 이분 그래프가 색이 서로 다른 임의의 두 정점을 잇는 해밀톤 경로를 가지면 *해밀톤-laceable (hamiltonian-laceable)* 그래프라고 부른다. $|W| = |B| + 1$ 이면서 임의의 흰색 정점 쌍을 잇는 해밀톤 경로가 존재하고, $|W| = |B| - 1$ 이면서 임의의 검정 정점 쌍을

있는 해밀톤 경로가 존재하는 그래프도 해밀톤-laceable 그래프라고 한다. 이 개념을 확장하여 $|F| \leq f$ 인 임의의 고장 집합 F 에 대하여 $G \setminus F$ 가 모든 정점 쌍에 대하여 L^{opt} -경로를 가지면 G 를 f -고장 강한 해밀톤-laceable(f -fault strongly hamiltonian-laceable) 그래프라고 한다.

$m \times n$ 이분 토러스의 $R(i:j)$ 로, $1 \leq i < j \leq m$, 유도된(induced) 부분 그래프는 $P_{j-i+1} \times C_n$ 과 동치이고, $C(p:q)$ 로, $1 \leq p < q \leq n$, 유도된 부분 그래프는 $P_{q-p+1} \times C_m$ 과 동치이다. 여기서 P_l 은 정점의 개수가 l 인 경로 그래프이다. 또한 $R(i:j) \cap C(p:q)$ 로 유도된 부분 그래프는 $P_{j-i+1} \times P_{q-p+1}$ 을 부분 그래프로 가지며, 랩어라운드 에지를 포함하지 않으면 동치가 된다. $m \times n$ 토러스에서 1-고장 쌍형 2-DPC를 설계하기 위하여 이들 부분 그래프에 대한 다음과 같은 해밀톤 성질을 활용한다. 두 경로의 곱 $P_m \times P_n$ 을 사각 그리드(rectangular grid)라고 하며, 사각 그리드에서 분지수(degree)가 2인 정점을 꼭지 정점(corner vertex)이라고 부른다.

보조 정리 1. [13] $m, n \geq 2$ 인 사각 그리드 $P_m \times P_n$ 에서, mn 이 짝수이면 임의 꼭지 정점과 이와 색이 다른 정점 사이에 해밀톤 경로가 존재하고, mn 이 홀수이면 임의 꼭지 정점과 이와 색이 같은 정점 사이에 해밀톤 경로가 존재한다.

보조 정리 2. [14] $m \geq 2$, 짝수 $n \geq 4$ 일 때, $P_m \times C_n$ 은 1-고장 강한 해밀톤-laceable 그래프이며, 2-정점-고장 L^{opt} -사이클을 가지는 그래프이다.

이 논문에서 경로는 정점들의 열(sequence)로 표현한다. 그래프 G 의 두 정점 u 와 v 를 잇는 경로를 $u-v$ 경로라고 부르고, G 의 모든 정점을 지나는 $u-v$ 경로를 $u-v$ 해밀톤 경로라고 한다. G 의 정점 부분 집합 X 로 유도된 G 의 부분 그래프를 $G\langle X \rangle$ 로 쓰고, $G\langle X \rangle$ 에서 X 에 속한 정점 쌍 u, v 를 잇는 해밀톤 경로를 $H[u, v|X]$ 로 나타낸다. 이때 $X = \emptyset$ 이면 $H[u, v|X]$ 는 빈 경로를 의미한다.

3. $P_m \times C_n$ 의 서로소인 경로 커버

이 절에서는 $m \times n$ 이분 토러스에서 1-고장 쌍형 2-DPC를 설계할 때 활용하기 위하여, $R(i:j)$ 로, $1 \leq i < j \leq m$, 유도된 부분 그래프나 $C(p:q)$ 로, $1 \leq p < q \leq n$, 유도된 부분 그래프의 다대다 2-DPC 성질을 고찰하기로 한다. 구체적으로 말하면, $m \geq 2$, 짝수 $n \geq 4$ 인 일반적인 m, n 에 대한 $P_m \times C_n$ 의 비쌍형/쌍형 2-DPC 성질을 제시한다. 먼저 정리 1에서 고장 요소가 없을 때 $P_m \times C_n$ 의 비쌍형 2-DPC 설계를 고려한다.

정리 1. $m \geq 2$, 짝수 $n \geq 4$ 인 임의의 정수 쌍에 대하여, $P_m \times C_n$ 에 주어진 두 소스 s_1, s_2 와 싱크 t_1, t_2 의 균형 인자가 0이면, 항상 이들을 잇는 비쌍형 2-DPC가 존재한다.

증명. m 에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다. 기본 경우인 $m=2$ 일 때, 두 소스 s_1, s_2 가 흰색 정점이고, 두 싱크 t_1, t_2 가 검정 정점이면 비쌍형 2-DPC가 존재함이 [15]에 증명되어 있다. $m=2$ 이고 s_1 과 t_1 이 같은 색을 가질 경우에도 비쌍형 2-DPC가 존재함을 보이고자 한다.

$m=2$ 이고 어떤 두 터미널이 같은 열에 있을 경우에, 일반성을 잃지 않고 두 터미널이 있는 열을 $C(1)$ 이라고 두고 v_1^1 을 s_1 이라고 하자. $v_1^2 = t_2$ 이면 $s_2 \in C(i), t_1 \in C(j), i \leq j$ 라고 두자. 그림 2(a)와 같이 $C(1:i-1)$ 로 유도된 부분 그래프 $G\langle C(1:i-1) \rangle$ 에서 s_1-t_2 해밀톤 경로 $H[s_1, t_2 | C(1:i-1)]$ 과 $G\langle C(i:n) \rangle$ 에서 s_2-t_1 해밀톤 경로 $H[s_2, t_1 | C(i:n)]$ 을 각각 보조 정리 1에 의해서 찾을 수 있다. $v_1^2 = s_2$ 이면, $t_1 \in C(i), t_2 \in C(j), i \leq j$ 라고 하자. $i=j$ 인 경우에는 i 가 짝수이면($v_i^1 = t_2$), 그림 2(b)와 같이 s_1-t_2 경로 ($v_1^1, H[v_2^1, v_{i-1}^1 | C(2:i-1)], v_i^1$)와, s_2-t_1 경로 ($v_1^2, H[v_n^2, v_{i+1}^2 | C(i+1:n)], v_i^2$)를 찾으면 되고, i 가 홀수이면($v_i^1 = t_1$), 그림 2(c)와 같이 s_1-t_2 경로 ($v_1^1, H[v_n^1, v_{i+1}^1 | C(i+1:n)], v_i^1$)와 s_2-t_1 경로 ($v_1^2, H[v_2^2, v_{i-1}^2 | C(2:i-1)], v_i^2$)를 찾으면 된다. 마지막으로 $i < j$ 인 경우에는 그림 2(d)와 같이 s_1-t_1 경로 ($v_1^1, H[v_2^1, t_1 | C(2:i)]$)와 s_2-t_2 경로 ($v_1^2, H[v_n^2, t_2 | C(i+1:n)]$)이 존재한다.

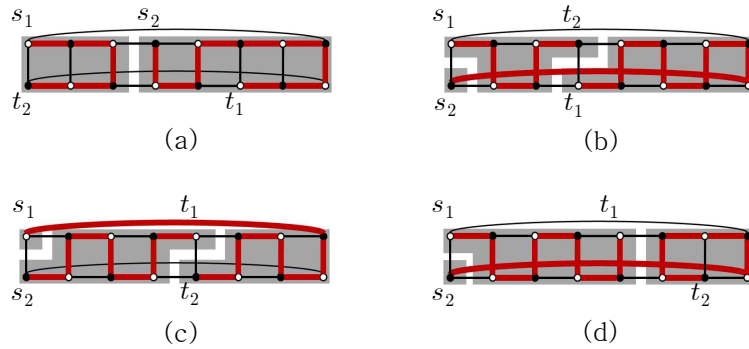


그림 2. $m=2$ 이고 $C(1)$ 에 두 터미널이 있을 경우.

$m=2$ 이고 모든 터미널이 서로 다른 열에 있을 경우에, 각 소스 $s_p (p=1,2)$ 에서 시작하여 좌측이나 우측 방향으로 열들을 찾아보면 적어도 한 쪽에서는 소스를 만나기 전에 싱크 $t_q (q=1,2)$ 를 만난다. 만약 소스 s_p 가 싱크 t_q 와 다른 색을 가지면, $s_p \in C(1), t_q \in C(i)$ 라고 하고 이들과 다른 두 터미널 s_{3-p}, t_{3-q} 는 각각 $C(j), C(k)$ 에, $i < j < k$, 있다고 하자. 그러면 $G\langle C(1:j-1) \rangle$ 에서 s_p-t_q 해밀톤 경로를 찾고 남은 그래프에서 $s_{3-p}-t_{3-q}$ 해밀톤 경로를 찾으면 된다.

남은 경우는 일반성을 잃지 않고 s_1 은 $C(1)$ 에 속한 흰색 소스이며, $s_2 \in C(i), t_2 \in C(j), t_1 \in C(k), i < j < k$ 라고 하자. $s_1, t_1 \in W$ 이고 $s_2, t_2 \in B$ 임에 유의한다. s_2 와 t_2 가 같은 행에 있을 경우에는 이들이 $R(2)$ 에 속하는 경우, 그림 3(a)와 같이 $G\langle R(2) \cap C(i:j) \rangle$ 의 s_2-t_2

해밀톤 경로와 s_1-t_1 경로 ($H[v_1^1, v_{i-1}^1 | C(1:i-1)], H[v_i^1, v_j^1 | R(1) \cap C(i:j)], H[v_{j+1}^1, t_1 | C(j+1:n)]$)가 존재한다. $s_2, t_2 \in R(1)$ 일 때도 같은 방법으로 찾을 수 있다. s_2 와 t_2 가 다른 행에 있다면, s_2 는 $R(1)$ 에 t_2 는 $R(2)$ 에 있을 경우, 그림 3(b)와 같이 s_1-t_2 경로 ($H[v_1^1, v_{i-1}^2 | C(1:i-1)], H[v_i^2, v_j^2 | R(2) \cap C(i:j)]$)와 s_2-t_1 경로 ($H[v_i^1, v_j^1 | R(1) \cap C(i:j)], H[v_{j+1}^1, t_1 | C(j+1:n)]$)가 존재한다. $s_2 \in R(2), t_2 \in R(1)$ 인 경우도 같은 방법으로 찾을 수 있다.

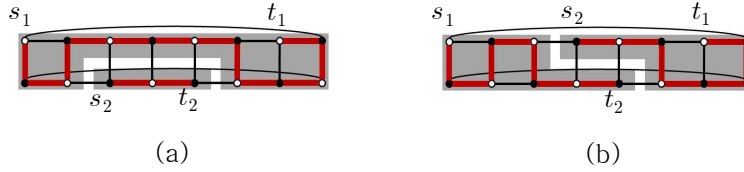


그림 3. $m=2$ 이고 모든 터미널이 서로 다른 열에 있을 경우.

이제 $m \geq 3$ 인 귀납적 단계를 고려한다. 먼저 $R(1)$ 이나 $R(m)$ 에 터미널이 없는 경우를 고려하는데, $s_1, s_2, t_1, t_2 \in R(1:m-1)$ 이라고 두자. $G\langle R(1:m-1) \rangle$ 은 $P_{m-1} \times C_n$ 과 동형이므로 귀납적 가설에 의하여 비쌍형 2-DPC가 존재한다. 만약 2-DPC의 경로 중 하나가 행 $m-1$ 에 속한 에지 (v, w) 를 지난다면, 이 에지를 삭제하고 v, w 에 인접한 $R(m)$ 의 두 정점 v', w' 를 잇는 해밀톤 경로 $H[v', w' | R(m)]$ 으로 대체하면 된다. 이러한 에지 (v, w) 가 존재하지 않는 경우는 $n=4$ 이고 $R(m-1)$ 에 속한 정점들이 모두 터미널인 경우뿐이다. 왜냐하면 $G\langle R(1:m-1) \rangle$ 에서 $R(m-1)$ 에 속한 모든 정점들은 분지수가 3이고, 터미널이 아닌 정점 모두는 2-DPC에 속한 경로의 중간 정점이 되기 때문이다. 이 경우 두 소스 s_1, s_2 는 각각 서로 다른 하나의 싱크와 인접하게 된다. s_1 은 t_1 과 인접하고, s_2 는 t_2 와 인접하다고 하자. s_1, t_1 에 인접한 $R(m-2)$ 의 정점을 각각 s_1', t_1' 이라고 할 때, s_1-t_1 경로 ($s_1, H[s_1', t_1' | R(1:m-2)], t_1$)이 존재하며, 같은 방식으로 s_2, t_2 에 인접한 $R(m)$ 의 정점을 s_2', t_2' 이라고 할 때, s_2-t_2 경로 ($s_2, H[s_2', t_2' | R(m)], t_2$)가 존재한다.

이제 $R(1)$ 과 $R(m)$ 이 모두 터미널을 가질 경우를 고려한다. $R(1)$ 의 터미널 수가 $R(m)$ 보다 더 많거나 같다고 가정할 수 있다. $R(m)$ 에 터미널이 하나 있다면 그 것을 t_2 라고 두자. t_2 에 인접한 $R(m)$ 의 두 정점을 u, v 로 두면 u 와 v 중 $R(m-1)$ 의 터미널이 아닌 정점과 인접한 정점이 존재한다. 왜냐하면 u, v 와 인접한 $R(m-1)$ 의 정점은 t_2 와 같은 색을 가지고, $R(1:m-1)$ 에 속한 터미널 중 t_2 와 같은 색을 가지는 터미널은 하나만 존재하기 때문이다. $R(m-1)$ 의 터미널과 인접하지 않은 정점을 u 로 두고 u 에 인접한 $R(m-1)$ 의 정점을 t_2' 이라고 두자. 귀납적 가설에 의하여 $G\langle R(1:m-1) \rangle$ 에는 s_1, s_2 와 t_1, t_2' 을 잇는 비쌍형 2-DPC가 존재한다. 이 2-DPC의 s_p-t_2' 경로와 $H[u, t_2 | R(m)]$ 을 연결하여 s_p-t_2 경로를 얻을 수 있다.

마지막으로 $R(m)$ 에 2개의 터미널 α, β 가 존재하는 경우를 고려한다. 가정에 의하여

$R(1)$ 에도 터미널이 두 개 존재하므로, $R(m-1)$ 에는 터미널이 없다. $G\langle R(m) \rangle$ 에는 해밀톤 사이클 $(\alpha, \dots, v, \beta, \dots, u)$ 이 존재한다. 이 사이클에서 에지 (v, β) , (u, α) 를 제거하여 서로소인 $\alpha-v$ 경로와 $\beta-u$ 경로를 얻을 수 있다. u, v 에 인접한 $R(m-1)$ 의 정점을 u', v' 이라고 하면, $G\langle R(1:m-1) \rangle$ 는 비쌍형 2-DPC를 가진다. 이 때 α, β 각각이 소스이면 u', v' 이 소스 역할을 하고, 싱크이면 싱크 역할을 한다. 이 2-DPC의 경로를 $\alpha-v$ 경로와 $\beta-u$ 경로를 이용하여 연장함으로써 원하는 비쌍형 2-DPC를 얻을 수 있다. \square

위 정리 1의 균형 인자가 0이라는 조건은, 균형 인자가 0이 아니면 비쌍형 2-DPC가 존재하지 않기 때문에 필요충분조건이 된다. $P_m \times C_n$ 에 균형 인자가 0이 되도록 두 소스와 싱크가 주어질 때 이들을 잇는 비쌍형 2-DPC는 존재하지만, 쌍형 2-DPC가 항상 존재하는 것은 아니다. $P_m \times C_n$ 에서 $s_1 = v_1^1, s_2 = v_2^1, t_1 = v_3^1, t_2 = v_4^1$ 인 경우 이들을 잇는 쌍형 2-DPC가 존재하지 않는다는 것을 쉽게 확인할 수 있다.

이후로는 $R(i:j)$ 로, $1 \leq i < j \leq m$, 유도된 $m \times n$ 이분 토러스의 부분 그래프나 $C(p:q)$ 로, $1 \leq p < q \leq n$, 유도된 부분 그래프의 쌍형 2-DPC 성질을 고려하기로 한다. 구체적으로 말하면, $m \geq 2, n \geq 4$ 인 일반적인 짝수 m, n 에 대한 $P_m \times C_n$ 에 터미널이 셋 있을 때, $R(1)$ 이나 $R(m)$ 에 있는 어떤 정점을 터미널이라고 간주하면 쌍형 2-DPC가 존재하는가 하는 문제를 고찰한다. 보조 정리 3, 4는 고장 정점을 하나 가질 때를 다루고, 보조 정리 5는 고장 요소가 없을 때를 다룬다.

보조 정리 3. [16] $m \geq 2, n \geq 4$ 인 임의의 짝수 m, n 에 대하여, $P_m \times C_n$ 이 검정 고장 정점 하나와 두 소스 s_1, s_2 , 싱크 t_1 을 갖고 s_2 가 흰색이며 (터미널과 고장 정점의) 균형 인자가 ± 1 이면, $R(1) \cup R(m)$ 에 어떤 정점 x 가 존재하여 s_1-t_1 경로와 s_2-x 경로로 이루어진 쌍형 2-DPC가 존재한다. 이때 $s_2 = x$ 일 수 있다.

위 보조 정리 3에서 균형 인자가 +1이면 x 는 흰색 정점이고, -1이면 검정 정점일 수밖에 없다.

보조 정리 4. $n \geq 4$ 인 임의의 짝수 n 에 대하여 $P_2 \times C_n$ 이 검정 고장 정점 하나와 두 소스 s_1, s_2 , 싱크 t_1 을 갖고 s_2 가 검정색이며 균형 인자가 +1이면, $R(1) \cup R(2)$ 에 어떤 흰색 정점 x 가 존재하여 s_1-t_1 경로와 s_2-x 경로로 이루어진 쌍형 2-DPC가 존재하거나 혹은 $R(1) \cup R(2)$ 에 속하는 어떤 정점 y_1, y_2 에 대하여 y_1-y_2 경로를 포함하는 쌍형 3-DPC가 존재한다. 이때 y_1, y_2 는 색이 서로 다르다.

증명. 균형 인자가 +1이고 s_2 가 검정 터미널이므로 s_1, t_1 은 흰색 터미널이다. s_1 을 가상의 고장 정점이라고 두고, 보조 정리 2를 이용하여 고장이 없는 정점들로 이루어진 L^{opt} -사이클을 찾는다. 이 사이클은 해밀톤 사이클이 된다. s_1 에 인접한 검정 정점이 셋이므로 이 사이클 상에 고장이나 s_2 가 아니면서 s_1 에 인접한 검정 정점 v 가 존재한다. 이 사이클 상의 두 $v-t_1$ 경로 중에서 s_2 를 지나지 않는 경로와 (s_1, v) 를 합성하여 s_1-t_1 경로를 만들고, v

를 지나는 s_2-t_1 경로가 v 를 지나기 직전에 지나는 흰색 정점을 x 로 두면 s_2-x 경로가 된다. 만약 이 사이클에서 s_2 와 t_1 이 인접하지 않으면, v 를 지나지 않는 s_2-t_1 경로에서 s_2 다음 정점을 y_1 , t_1 직전의 정점을 y_2 라고 두면 y_1-y_2 경로가 된다. \square

사실 보조 정리 4는 임의의 짝수 $m \geq 2$ 에 대하여 성립한다. 다만 증명이 복잡하므로, $m \times n$ 토러스의 쌍형 2-DPC를 설계할 때 $m=2$ 인 것만 이용하기로 한다. 그리고 y_1-y_2 경로를 포함하는 3-DPC를 허용하지 않고 s_1-t_1 경로와 s_2-x 경로로 이루어진 2-DPC를 고집하면, 이 보조 정리가 성립하지 않는다. $P_2 \times C_n$ 에서 $s_1 = v_1^1$, $t_1 = v_4^2$, $s_2 = v_3^2$, 고장 정점 $v_f = v_2^1$ 인 경우에 그렇다; 만약 조건을 만족하는 2-DPC가 존재한다면, v_3^1 과 v_2^2 은 중간 정점이 되어야 하므로 2-DPC가 (s_2, v_3^1) 과 (s_2, v_2^2) 를 동시에 지나야 하는 모순에 빠지게 된다.

보조 정리 5. [16] $m \geq 2$, $n \geq 4$ 인 임의의 짝수 m , n 에 대하여, $P_m \times C_n$ 에 주어진 임의의 두 소스 s_1 , s_2 와 싱크 t_1 의 균형 인자가 ± 1 이면, $R(1) \cup R(m)$ 에 어떤 정점 $x_i (i=1,2)$ 가 존재하여, 각 x_i 에 대하여 s_1-t_1 경로와 s_2-x_i 경로로 이루어진 쌍형 2-DPC가 존재한다. 여기서, $s_2 = x_i$ 일 수 있다.

위 보조 정리 5에서도 균형 인자가 $+1$ 이면 x_i 는 흰색 정점이고, -1 이면 검정 정점일 수 밖에 없다.

4. $m \times n$ 이분 토러스의 1-고장 2-DPC

이 절에서는 앞에서 고려한 보조 정리 3, 4, 5의 서로소인 경로 커버 성질을 이용하여 $m \times n$ 이분 토러스에서 고장 정점이 하나 있을 때 쌍형 2-DPC의 설계를 제시한다. m , n 을 $m, n \geq 4$ 인 임의의 짝수라고 하자. $m \times n$ 토러스에 고장 정점 하나와 소스 s_1 , s_2 그리고 싱크 t_1 , t_2 가 균형 인자가 0이 되도록 주어져 있다면 항상 s_1-t_1 경로와 s_2-t_2 경로로 이루어진 쌍형 2-DPC가 존재함을 보이고자 한다.

$m \times n$ 토러스 G 는 $P_{m_1} \times C_n$ 과 $P_{m_2} \times C_n$ 으로 분할할 수 있다. 이때, $m_1 + m_2 = m$, 짝수 $m_1, m_2 \geq 2$ 가 되도록 한다. $P_{m_1} \times C_n$ 을 G_0 , $P_{m_2} \times C_n$ 을 G_1 이라고 하자. 혹은 대칭적으로 $P_{n_1} \times C_m$ 과 $P_{n_2} \times C_m$ ($n_1 + n_2 = n$, 짝수 $n_1, n_2 \geq 2$)으로 분할할 수도 있다. 만약 G_0 이 앞서 보인 보조 정리 3, 4, 혹은 5의 조건을 만족한다면, 이를 이용하여 다음과 같이 쌍형 2-DPC를 설계할 수 있다. G_0 을 $R(1:m_1)$ 로 유도된 G 의 부분 그래프라고 하면, $R(1) \cup R(m_1)$ 에 속한 각 정점은 G_1 에 속한 한 정점과 인접함을 관찰한다.

보조 정리 6. G_0 이 보조 정리 3의 조건을 만족하면, G 는 쌍형 2-DPC를 갖는다.

증명. 보조 정리 3에 의하여 G_0 은 어떤 $x \in R(1) \cup R(m_1)$ 에 대하여 s_1-t_1 경로와 s_2-x 경

로 이루어진 쌍형 2-DPC를 갖는다. x 에 인접한 G_1 의 정점을 x' 이라고 하면, 균형 인자 조건에 의하여 x 는 t_2 와 같은 색이고 x' 은 t_2 와 다른 색이다. 따라서 G_1 에는 $x'-t_2$ 해밀톤 경로가 존재하고, 이 경로를 s_2-x 경로와 합성하면 s_2-t_2 경로가 된다. \square

보조 정리 7. G_0 이 보조 정리 4의 조건을 만족하면, G 는 쌍형 2-DPC를 갖는다.

증명. 어떤 $x \in R(1:2)$ 에 대하여 s_1-t_1 경로와 s_2-x 경로로 이루어진 쌍형 2-DPC가 G_0 에 존재한다면, 위 보조 정리 6과 동일한 방식으로 쌍형 2-DPC를 설계하면 된다. y_1-y_2 경로를 포함하여 쌍형 3-DPC가 존재한다면, x, y_1, y_2 와 인접한 G_1 의 정점을 각각 x', y_1', y_2' 으로 둔다. y_1, y_2 중에서 y_1 이 검정색이라고 하면 y_1' 은 흰색이다. 균형 인자 조건에 의하여 t_2 도 흰색이다. G_1 에서 $y_1' \neq t_2$ 이면 t_2, x' 을 소스로, y_1', y_2' 을 싱크로 두고 정리 1을 이용하여 *비*쌍형 2-DPC를 찾고, $y_1' = t_2$ 이면 t_2 를 가상의 고장으로 두고 $x'-y_2'$ 해밀톤 경로를 찾는다. G_1 의 경로(들)과 s_2-x 경로를 합성하면 s_2-t_2 경로가 된다. \square

보조 정리 8. G_0 이 보조 정리 5의 조건을 만족하면, G 는 쌍형 2-DPC를 갖는다.

증명. G_0 은 어떤 두 정점 $x_i \in R(1) \cup R(m_1)$, $i = 1, 2$ 에 각각 대하여 s_1-t_1 경로와 s_2-x_i 경로로 이루어진 쌍형 2-DPC를 갖는다. 고장 정점이 검정색이므로, t_2 는 흰색이고 x_i 는 검정색이다. x_i 에 인접한 G_1 의 정점을 x_i' 으로 두고, x_1', x_2' 중에서 $x_1' \neq t_2$ 라고 하자. G_1 에서 $x_1'-t_2$ 해밀톤 경로를 찾고, 이 경로를 s_2-x_1 경로와 합성하면 s_2-t_2 경로가 된다. \square

위 보조 정리 6, 7, 8에서 G_0 에 있는 터미널이 s_1, t_1, s_2 가 아니고 다른 것, 예컨대 s_2, t_2, s_1 이더라도 대칭적으로 G 의 쌍형 2-DPC를 설계할 수 있음에 유의한다. 또한 다음과 같이 $m \times n$ 토러스에 대한 문제를 크기가 더 작은 $(m-2) \times n$ 토러스에 대한 문제로 변형할 수 있는 경우도 있다.

보조 정리 9. $m \times n$ 토러스에 $m \geq 6$ 이면서 고장 정점과 터미널을 포함하지 않은 인접한 행 $R(i:i+1)$ 이 존재하면 $(m-2) \times n$ 토러스에 대한 2-DPC 문제로 변형된다.

증명. 일반성을 잃지 않고 $1 < i < i+1 < m$ 이라고 하자. $R(i:i+1)$ 에 속한 정점과 그에 인접한 에지를 모두 제거한 다음 모든 j 에, $1 \leq j \leq n$, 대하여 $R(i-1)$ 의 정점 v_j^{i-1} 와 $R(i+2)$ 의 정점 v_j^{i+2} 를 잇는 가상의 에지를 추가하면 $(m-2) \times n$ 토러스와 동형이 된다. 이 $(m-2) \times n$ 토러스가 주어진 소스와 싱크를 잇는 쌍형 2-DPC를 가진다고 가정하고, 이를 이용하여 $m \times n$ 토러스에서 쌍형 2-DPC를 설계할 수 있음을 보인다. $(m-2) \times n$ 토러스의 2-DPC가 가상 에지를 지난다면, 경로가 지나는 가상 에지를 $(v_{j_1}^{i-1}, v_{j_1}^{i+2}), (v_{j_2}^{i-1}, v_{j_2}^{i+2}), \dots, (v_{j_k}^{i-1}, v_{j_k}^{i+2})$ 라고 하고, 일반성을 잃지 않고 $j_1 = 1, j_1 < j_2 < \dots < j_k, j_{k+1} = n+1$ 이라고 가정한다. 각각의 가상 에지 $(v_{j_r}^{i-1}, v_{j_r}^{i+2})$ 을 $(v_{j_r}^{i-1}, v_{j_r}^i, v_{j_r+1}^i, \dots,$

$v_{j_{r+1}-1}^i, \dots, v_{j_r+1}^{i+1}, v_{j_r}^{i+1}, v_{j_r}^{i+2}$)로 대체하여 $2(j_{r+1}-j_r)$ 개의 정점을 추가로 지나도록 만들면 충분하다. 2-DPC가 가상 에지를 하나도 지나지 않는다면, 행 $i-1$ 이나 행 $i+2$ 상의 최소한 한 에지 (u, v) 를 지남을 먼저 보인다. 두 행에 속한 정점은 최소한 8개이고, 이들 중 터미널과 고장 정점을 제외한 셋 이상은 2-DPC의 중간 정점이 되어야 하므로 당연히 성립한다. 이 에지 (u, v) 를 $G\langle R(i:i+1) \rangle$ 에서 각각 u, v 에 인접한 정점 u' 과 v' 을 잇는 해밀턴 경로로 대체하면 충분하다. \square

위 보조 정리 9와 대칭적으로 $n \geq 6$ 이고 고장 정점과 터미널을 포함하지 않은 인접한 열 $C(j:j+1)$ 이 존재하면 $m \times (n-2)$ 토러스에 대한 2-DPC 문제로 변형된다. 이제 고장 정점을 가진 경우에 쌍형 2-DPC를 설계할 준비가 끝났다. 사실 아래 정리 2의 균형 인자가 0이라는 조건은, 균형 인자가 0이 아니면 쌍형 2-DPC가 존재하지 않기 때문에 필요충분조건이 된다.

정리 2. $m, n \geq 4$ 인 짝수 m, n 에 대하여 $m \times n$ 토러스에 정점 고장 하나와 임의의 두 소스 s_1, s_2 와 두 싱크 t_1, t_2 가 주어질 때, 균형 인자가 0이면 항상 s_1-t_1 경로와 s_2-t_2 경로로 이루어진 쌍형 2-DPC가 존재한다.

증명. 일반성을 잃지 않고 고장 정점 v_f 는 검정색이라고 가정한다. 그러면 균형 인자 조건에 의하여 검정 터미널이 하나이고 나머지 세 터미널은 모두 흰색이다. s_1 을 검정 터미널이라고 둔다. 보조 정리 9에 의하여 $m \geq 6$ 이면 고장 정점과 터미널을 포함하지 않은 인접한 두 행이 존재하지 않고, $n \geq 6$ 이면 고장 정점과 터미널을 포함하지 않은 인접한 두 열이 존재하지 않는다고 가정한다. 주로 앞서 보인 보조 정리 6, 7, 8을 이용할 수 있도록 $m \times n$ 토러스 G 를 G_0 과 G_1 로 분할할 수 있음을 보이고, 분할이 불가능한 특별한 경우에는 G 에서 직접 2-DPC를 설계한다. 세 가지 경우로 나누어 증명한다.

경우 1: 터미널을 셋 이상 가진 행 $R(i)$ 가 (혹은 대칭적으로 열이) 있을 때.

$R(i)$ 에 흰색 터미널이 셋 있으면, 각 흰색 터미널이 속한 열을 p, q, r ($p < q < r$)이라고 하자. $C(p:q-1), C(q:r-1), C(r:n) \cup C(1:p-1)$ 은 모두 짝수개의 열을 가진다. 이들 중 하나에 검정 터미널 s_1 이 존재하고, 최소한 남은 둘 중 하나, 예컨대 $C(p:q-1)$ 은 t_1 과 다른 흰색 터미널을 갖는다. $C(p:q-1)$ 로 유도된 부분 그래프 $G\langle C(p:q-1) \rangle$ 을 G_1 로 두고 나머지를 G_0 으로 두면, G_1 의 터미널과 쌍을 이루는 G_0 의 터미널은 흰색이 된다. 따라서 G_0 이 고장 정점을 가지면 보조 정리 6을 적용하고, 그렇지 않으면 보조 정리 8을 적용하면 된다.

이제 $R(i)$ 에는 흰색 터미널 둘과 검정 터미널 하나가 있다. 그러면 $R(i-1)$ 이나 $R(i+1)$ 둘 중 하나는 터미널을 가지지 않는다. $R(i-1)$ 이 터미널을 가지지 않는다고 하고, $G\langle R(i-1:i) \rangle$ 를 G_0 으로, 나머지를 G_1 로 둔다. G_0 이 고장 정점을 가지면, G_1 의 터미널과 쌍을 이루는 G_0 의 터미널 색에 따라 보조 정리 6이나 7을 적용한다. G_0 에 고장이 없으면 보조 정리 8을 적용하면 된다.

경우 2: 네 터미널이 각각 다른 행에 있고 $m \geq 6$ 일 때 (혹은 대칭적으로 다른 열에 있고 $n \geq 6$ 일 때).

s_1 이 $R(1)$ 에 속하며 흰색 터미널들은 $R(i), R(j), R(k)$ 에, $i < j < k$, 속한다고 하자. $j > i+1$ 이거나 $k > j+1$ 이면, 예컨대 $j > i+1$ 이라면 $R(i:i+1)$ 과 $R(j-1:j)$ 는 각각 터미널을 하나만 가진다. 둘 중 하나 $R(i:i+1)$ 의 터미널이 t_1 과 다르다고 하면, $G\langle R(i:i+1) \rangle$ 을 G_1 로 나머지를 G_0 으로 두고 보조 정리 6이나 8을 적용하면 된다. $j = i+1, k = j+1$ 이라고 하자. $i \neq 2$ 이고 $k \neq m$ 이라면 $R(i-1:i)$ 와 $R(k:k+1)$ 은 터미널 하나만 가지므로, 위의 $j > i+1$ 인 경우와 마찬가지로 둘 중 하나로 유도된 부분 그래프를 G_1 로 두고 보조 정리 6이나 8을 적용하면 된다.

$i = 2$ 혹은 $k = m$ 이라면 일반성을 잃지 않고 $i = 2$ 라고 둔다. 그러면 $R(m-1:m)$ 에는 터미널이 없고 가정에 의하여 고장 정점 v_f 를 가진다. $v_f \in R(m-1)$ 이라면 $G\langle R(m) \cup R(1) \rangle$ 을 G_1 로 나머지를 G_0 으로 두고 보조 정리 6을 적용한다. $v_f \in R(m)$ 이라면 $t_1 \notin R(k)$ 인 경우에는 $G\langle R(k:k+1) \rangle$ 을 G_1 로 나머지를 G_0 으로 두고 보조 정리 6을 적용하면 되고, $t_1 \in R(k)$ 인 경우에는 $G\langle R(1:j) \rangle$ 에서 s_1 을 가상의 고장으로 두고 $s_2 - t_2$ 해밀톤 경로를 찾고, $G\langle R(k:m) \rangle$ 에서 s_1 과 인접한 $R(m)$ 의 정점 s_1' 과 t_1 을 잇는 해밀톤 경로를 찾은 다음 (s_1, s_1') 과 합성하면 $s_1 - t_1$ 경로가 된다.

경우 3: 위의 경우 1과 2에서 고려되지 않고 남은 경우.

먼저 터미널 둘을 가진 행이나 열이 존재함을 주장한다. 만약 그렇지 않다면, 경우 2에 의하여 $m = n = 4$ 이다. 검정 터미널 s_1 이 속한 행과 열을 제외하고 남은 그래프는 $P_3 \times P_3$ 과 동형이며 네 개의 흰색 정점을 가지는데, 한 행에 두 흰색 정점이 위치하고 다른 두 흰색 정점은 한 열에 분포한다. 따라서 세 개의 흰색 터미널들이 모두 다른 행과 열에 위치할 수 없어서 모순이다. 일반성을 잃지 않고, 터미널 둘을 가진 행 $R(i)$ 가 존재한다고 가정한다. $R(i)$ 의 두 터미널을 각각 u 와 v 라고 하고 열 p 와 q 에, $p < q$, 속한다고 하자.

경우 3.1: u, v 와 다른 두 터미널이 어떤 행 $R(j)$ 에 있을 때.

일반성을 잃지 않고 $i < j$ 이며 $R(i)$ 의 두 터미널이 흰색이라고 하자. 그러면 $q - p$ 는 짝수이다. $R(j)$ 의 흰색 터미널을 β 라고 두면, $s_1, \beta \in R(j)$ 이다. $u' = v_p^j, v' = v_q^j$ 라고 두면, u', v' 중 하나는 터미널이다; 그렇지 않다면 네 터미널이 모두 서로 다른 열에 속하게 되어 위 경우 2에 의하여 $n = 4$ 이어야 하지만, $R(j)$ 의 두 터미널의 색이 다르기 때문에 불가능하다. 또한 u' 과 v' 의 색이 같아서 둘 모두 터미널이 될 수는 없다. u' 을 터미널이라고 두자. $v \neq t_1$ 인 경우에는, $C(q-1)$ 이나 $C(q+1)$ 중 하나에는 터미널이 없는데, $C(q+1)$ 에 터미널이 없다고 하자. 그러면 $G\langle C(q:q+1) \rangle$ 을 G_1 로 남은 그래프를 G_0 으로 두고, G_0 에 고장 정점이 있으면 보조 정리 6을 그렇지 않으면 보조 정리 8을 적용하면 된다.

이제 $v = t_1$ 인 경우를 고려하면 된다. $R(j)$ 의 u' 과 다른 터미널은 r 열에 있고 $p < r < q$ 라고 하자. 그러면 $C(p:r)$ 은 짝수개의 열을 가진다. $C(p:r)$ 이 두 열로 이루어져 있거나 고장 정점 v_f 를 포함하지 않으면, $G\langle C(p:r) \rangle$ 을 G_0 으로 나머지를 G_1 로 두고 보조 정리 7이나 8을 적용하면 된다. 그럼 $C(p:r)$ 은 v_f 를 포함하고 넷 이상의 열로 이루어져 있다. 보조 정리 9에 인한 가정에 의하여, $v_f \notin C(r)$ 이다. $u' = s_1$ 이고 $\beta \in C(r)$ 이면 $G\langle C(r-1:r) \rangle$ 을 G_1 로 나머지를 G_0 으로 두고 보조 정리 6이나 8을 적용하면 되고, $u' = \beta$ 이고 $s_1 \in C(r)$ 이면 $G\langle C(r:q) \rangle$ 에서 $s_1 - v$ 해밀톤 경로를 찾고 남은 그래프에서 $\beta - u$ 해밀톤 경로를 찾으면 된다.

경우 3.2: u, v 와 다른 두 터미널이 서로 다른 행에 있을 때.

u, v 의 색이 다른 경우를 먼저 고려한다. 이때 $s_1 \in R(i)$ 이다. $R(i-1)$ 이나 $R(i+1)$ 에 터미널이 존재하면 $G\langle R(i-1:i) \rangle$ 나 $G\langle R(i:i+1) \rangle$ 을 G_0 으로, 나머지를 G_1 로 두고 보조 정리 6, 7 혹은 8을 적용하면 된다. $R(i-1)$ 이나 $R(i+1)$ 에 터미널이 없으면, u, v 와 다른 두 터미널이 각각 $R(k), R(j)$ 에 속한다고 하고 $i < k < j, t_1 \notin R(j)$ 라고 하자. $R(i:k)$ 의 행의 개수가 짝수이면 $G\langle R(i:k) \rangle$ 를 홀수이면 $G\langle R(i-1:k) \rangle$ 를 G_0 으로 두고 나머지를 G_1 로 둔 다음, G_0 에 고장 정점의 유무에 따라 보조 정리 6이나 8을 적용하면 된다.

이제 u, v 가 모두 흰색인 경우를 고려한다. 검정 터미널 s_1 은 $R(k)$ 에, u, v 와 다른 흰색 터미널 β 는 $R(j)$ 에 속하고 $i < k < j$ 라고 하자. s_1 이 흰색 터미널과 같은 열에 속하지 않은 경우만 고려하면 충분하다; 그렇지 않고 한 열에 색이 다른 두 터미널이 속하면 바로 위의 u, v 의 색이 다른 경우나 경우 3.1 혹은 경우 1로 귀착되기 때문이다. 만약 $k = i+1$ 이라면 $G\langle R(i:i+1) \rangle$ 을 G_0 으로 나머지를 G_1 로 두고, 보조 정리 6, 7, 혹은 8을 적용하면 된다. 따라서 $k \neq i+1$ 이라고 가정한다. s_1 이 $C(r)$ 에 속하고 $p < r < q$ 라고 하자.

경우 2에 의하여 (i) 두 터미널을 포함하는 열이 존재하거나 혹은 (ii) 터미널이 모두 다른 열에 속하고 $n=4$ 이다. 두 터미널을 포함하는 열이 있는 경우에는, 그 열이 s_1 을 포함할 수 없으므로 β 를 포함한다. 일반성을 잃지 않고 β 가 u 와 같은 열에 속한다고, 즉 $\beta \in R(j) \cap C(p)$ 라고 하자. 그러면 $v \neq t_1$ 일 때 $G\langle C(q:q+1) \rangle$ 을 G_1 로 $\beta \neq t_1$ 일 때 $G\langle R(j:j+1) \rangle$ 을 G_1 로 두고 남은 그래프를 G_0 으로 둔 다음, 보조 정리 6이나 8을 적용하면 된다.

터미널이 모두 다른 열에 속하고 $n=4$ 인 경우 (ii)에서는, u, v 가 모두 흰색 터미널이므로 $q = p+2$ 가 되고, 따라서 $p=1, q=3$, 그리고 $s_1 \in C(2), \beta \in C(4)$ 라고 둘 수 있다. 또한 $k \neq i+1$ 임을 상기한다. $R(k-1:k)$ 나 $R(k:k+1)$ 중에서, 예컨대 $R(k-1:k)$ 가 β 와 v_f 를 모두 포함하지 않으면, $G\langle R(k-1:k) \rangle$ 를 G_1 로 나머지를 G_0 으로 두고, 보조 정리 6을 적용한다. 그러면 남은 경우에는 $v_f \in R(k)$ 이거나 혹은 $v_f \in R(k-1)$ 이고 $\beta \in R(k+1)$ 이다. 이제 $m=4$ 임을 주장한다. $R(i+1:k-1)$ 에는 홀수 개의 행이 있는데, 행이 셋 이상이면

$R(i+1:i+2)$ 가 터미널과 v_f 를 가지지 않게 되어 가정에 모순된다. 또한 $R(k+1:n) \cup R(1:i-1)$ 도 셋 이상의 행을 가진다면 $R(k+1:k+2)$ 나 $R(j+1:j+2)$ 가 터미널과 v_f 를 가지지 않게 되어 다시 가정에 모순된다. β 가 흰색이기 때문에 $j-k$ 는 홀수가 됨에 유의한다.

이제 $m, n = 4$ 인 특별한 경우가 남았는데, $i = 1, k = 3, j = 4$ 라고 둘 수 있고, 그러면 $u = v_1^1, v = v_3^1, s_1 = v_2^3, \beta = v_4^4$ 가 된다. $v_f \in R(k)$ 인, 즉 $v_f = v_4^3$ 인 경우에는, $u = t_1$ 이면 $G\langle C(1:2) \rangle$ 를 $v = t_1$ 이면 $G\langle C(2:3) \rangle$ 을 G_0 으로 두고 남은 그래프를 G_1 로 둔 다음 각 부분 그래프에서 두 터미널을 잇는 해밀톤 경로를 찾는다. $\beta = t_1$ 이면 $s_1 - \beta$ 경로를 $(v_2^3, v_1^3, v_4^4, v_3^4)$ 라고 하고, $G\langle R(1:2) \rangle$ 에서 u, v 를 소스로 v_3^2, v_2^1 를 싱크로 두고 비쌍형 2-DPC를 찾은 다음 경로 (v_3^3, v_3^4, v_2^4) 와 합성하면 된다.

$v_f \in R(k-1)$ 이면 v_f 는 $R(2)$ 의 두 위치 모두 가능하지만 대칭이므로 $v_f = v_3^2$ 이라고 두자. 그리고 $\beta = t_1$ 이면 $G\langle R(3:4) \rangle$ 를 $u = t_1$ 이면 $G\langle C(1:2) \rangle$ 를 G_0 으로 두고 남은 그래프를 G_1 로 둔 다음 각 부분 그래프에서 두 터미널을 잇는 해밀톤 경로를 찾는다. $v = t_1$ 이면, $s_1 - v$ 경로를 $(v_2^3, v_2^2, v_2^1, v_3^1)$ 으로 하고, $G\langle C(4) \cup C(1) \rangle$ 에서 β, u 를 소스로 v_1^4, v_4^3 를 싱크로 두고 비쌍형 2-DPC를 찾은 다음 (v_2^4, v_3^4, v_3^3) 과 합성하면 된다. 이것으로 정리 2의 증명이 모두 끝났다. \square

5. 결 론

이 논문에서는 $m \times n$ 이분 토러스에 균형 인자가 0이 되도록 고장 정점 하나와 두 소스, 두 싱크가 주어지면, 항상 쌍형 2-DPC를 설계할 수 있음을 증명하였다. 균형 인자가 0이라는 조건은, 균형 인자가 0이 아니면 쌍형 2-DPC가 존재하지 않기 때문에, 고장 요소 하나를 가진 이분 토러스가 쌍형 2-DPC를 가질 필요충분조건이 된다. 이 연구 결과는 $m \times n$ 이분 토러스가 균형 인자가 0이 되더라도 항상 2-고장 쌍형 2-DPC를 가지는 것이 아니고 또한 항상 쌍형 3-DPC를 가지는 것도 아니라는 의미에서 최적이다. 아래 그림 4(a)는 고장 정점이 둘일 때 쌍형 2-DPC를 가지지 않는 사례를 보여주고, 그림 4(b)는 3-DPC가 존재하지 않은 소스, 싱크의 위치를 보여준다. 그림에서 \times 는 고장 정점임을 나타낸다. 더구나 고장 요소가 없을 때 균형 인자가 0이면 항상 쌍형 2-DPC가 존재한다는 Makino[9]의 기존 연구를 확장한 것이다.

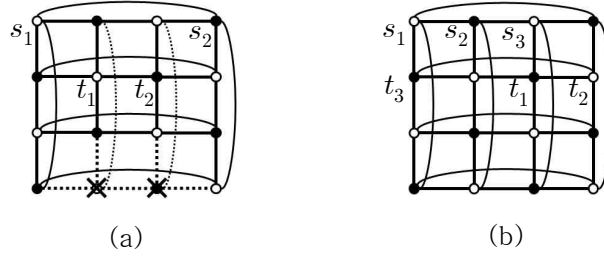


그림 4. 쌍형 DPC가 존재하지 않는 사례.

이 논문에서 제시한 증명을 따라가면 $P_m \times C_n$ 에서 비쌍형 2-DPC를 구하는 문제나 고정 정점을 하나 가진 $m \times n$ 토러스에서 쌍형 2-DPC를 구하는 문제에 대한 효율적인 재귀 알고리즘을 설계할 수 있다. 이 2-차원 토러스에 대한 연구를 확장하여 고차원 이분 토러스에서 쌍형 다대다 DPC를 설계하는 것은 앞으로의 연구 과제이다.

참고 문헌

- [1] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Many-to-many disjoint path covers in hypercube-like interconnection networks with faulty elements," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems* **17(3)**, pp. 227-240, Mar. 2006.
- [2] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Many-to-many disjoint path covers in the presence of faulty elements," *IEEE Trans. Computers* **58(4)**, pp. 528-540, Apr. 2009.
- [3] J.-H. Park, "Unpaired many-to-many disjoint path covers in the hypercube-like interconnection networks," *Journal of KIISE: Computer System and Theory* **33(10)**, pp. 789-796, Oct. 2006 (In Korean).
- [4] P. Gregor and T. Dvořák, "Path partitions of hypercubes," *Information Processing Letters* **108(6)**, pp. 402-406, 2008.
- [5] T. Dvořák and P. Gregor, "Partitions of faulty hypercubes into paths with prescribed endvertices," *SIAM J. Discrete Mathematics* **22(4)**, pp. 1448-1461, 2008.
- [6] X.B. Chen, "Many-to-many disjoint paths in faulty hypercubes," *Information Science* **179(18)**, pp. 3110-3115, 2009.
- [7] X.B. Chen, "Unpaired many-to-many vertex-disjoint path covers of a class of bipartite graphs," *Information Processing Letters* **110(6)**, pp. 203-205, 2010.
- [8] S.-Y. Kim, J.-H. Lee, and J.-H. Park, "Disjoint path covers in recursive circulants $G(2^m, 4)$ with faulty elements," *Theoretical Computer Science* **412(35)**, pp. 4636-4649, 2011.
- [9] K. Makino, "2-disjoint path covers in mesh-torus," *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* **1489**, Kyoto University, pp. 181-187, 2006.
- [10] J.-H. Park, "Many-to-many disjoint path covers in two-dimensional tori," *Journal of KIISE: Computer System and Theory* **38(1)**, pp. 42-48, Feb. 2011 (In Korean).
- [11] H.-C. Kim, "One-to-one disjoint path cover of tori," *Journal of KIISE: Computer System and Theory* **38(1)**, pp. 42-48, Feb. 2011 (In Korean).
- [12] E. Kim and J.-H. Park, "Paired many-to-many disjoint path covers in recursive circulants

- and tori,” *Journal of KIISE: Computer System and Theory* **36(1)**, pp. 40–51, Feb. 2009 (In Korean).
- [13] C.C. Chen and N.F. Quimpo, “On strongly hamiltonian abelian group graphs,” in *Australian Conference on Combinatorial Mathematics (LNCS #884)*, pp. 23–34, 1980.
- [14] J.-H. Park and H.-C. Kim, “Fault-hamiltonicity of product graph of path and cycle,” in *Proc. of the International Computing and Combinatorics Conference COCOON2003 (LNCS #2697)*, MT, USA, pp. 319–328, July 2003.
- [15] J.-H. Park and H.-C. Kim, “Fault hamiltonicity of double loop networks $G(mn;1,m)$ with even m and n ,” *Journal of KISS: Computer System and Theory* **27(10)**, pp. 868–879, Oct. 2000.
- [16] H.-D. Kim, *Many-to-Many Disjoint Path Covers in Two-Dimensional Bipartite Tori with a Single Fault*, Master's Thesis, The Catholic University of Korea, Feb. 2012.