제한된 HL-그래프와 재귀원형군 $G(2^m,4)$에서 매칭 배제 문제

박 정흠

가톨릭대학교 컴퓨터정보공학부
420-743 경기도 부천시 원미구 역곡 2동 산 43-1
j.h.park@catholic.ac.kr
전화 (02) 2164-4366, 팩스 (02) 2164-4777

Matching Preclusion Problem in Restricted HL-graphs and Recursive Circulant $G(2^m,4)$

Jung-Heum Park

School of Computer Science and Information Engineering
The Catholic University of Korea
Yokkok 2-dong 43-1, Wonmi-gu, Puchon City, Kyonggi-do 420-743
j.h.park@catholic.ac.kr
TEL (02) 2164-4366, FAX (02) 2164-4777

* 본 연구는 2007년도 가톨릭대학교 교비연구비의 지원으로 이루어졌음.

제한된 HL-그래프와 재귀원형군 $G(2^m,4)$에서 매칭 배제 문제

Matching Preclusion Problem in Restricted HL-graphs and Recursive Circulant $G(2^m,4)$

요약

그래프의 매칭 배제 집합은 그것을 삭제한 그래프가 완전 매칭이나 준완전 매칭을 가지지 않는 에지 집합이다. 매칭 배제수는 모든 매칭 배제 집합의 최소 크기이다. 이 논문에서는 임의의 $m \geq 4$에 대하여 m-차원 제한된 HL-그래프와 재귀원형군 $G(2^m,4)$의 매칭 배제수는 분지수 m과 같고, 모든 최소 매칭 배제 집합은 한 정점에 인접한 에지 집합임을 보인다.

키워드: 완전 매칭, 준완전 매칭, 에지 고장, 고장 감내, 고장 해밀톤 성질, 상호연결망.

Abstract

The matching preclusion set of a graph is a set of edges whose deletion results in a graph that has neither perfect matchings nor almost perfect matchings. The matching preclusion number is the minimum cardinality over all matching preclusion sets. We show in this paper that, for any $m \geq 4$, the matching preclusion numbers of both m-dimensional restricted HL-graph and recursive circulant $G(2^m,4)$ are equal to degree m of the networks, and that every minimum matching preclusion set is the set of edges incident to a single vertex.

Key words: Perfect matching, almost perfect matching, edge fault, fault-tolerance, fault-hamiltonicity, interconnection networks.

1 서론

고성능 컴퓨터를 설계하기 위해서 다중 컴퓨터 네트워크(multicomputer network)를 구성하는 것은 비용이 적게 드는 방식이다[1]. 다중 컴퓨터 네트워크는 개별 기억장치를 가지는 노드와 노드를 서로 이어주는 통신 링크로 이루어져 있다. 다중 컴퓨터 네트워크에서 상호연결망(interconnection networks)은 전체 시스템의 성능에 큰 영향을 미치는 것으로 알려져 있다. 연결망 구조는 그래프로 자연스럽게 모델할 수 있는데, 이 때 노드는 그래프의 정점에 대응되고 통신 링크는 에지에 대응된다.

연결망 구조를 설계함에 있어서 노드의 수가 많아질수록 고장 감내(fault tolerance)에 대한 중요성이 높아가고 있다. 감내할 고장의 형태는 게이트에서 노드나 통신 링크에 이르기까지 다양하게 고려할 수 있지만, 노드나 통신 링크에서 발생하는 고장에 감내하고자 하는 시스템 레벨 고장 감내(system-level fault tolerance)가 다중 컴퓨터 네트워크에서는 보편적이고 타당한 모델로 인정되고 있다. 시스템에 고장이 발생하더라도 원래의 기능을 수행할 수 있을 때, 그 시스템을 고장 감내 시스템이라고 부른다.

다중 컴퓨터 네트워크의 연결망 구조의 고장 감내에 대한 대표적인 척도로 연결도(connectivity)가 있다. 이 외에 superconnectivity, toughness, scattering number, vertex-integrity, binding number, restricted connectivity와 같은 척도들이 사용된다. 이런 척도들은 연결도와 함께 사용될 때 고장 감내에 대한 좋은 척도로 인정되고 있다[2,3]. 최근에 Brigham 등이 [4]에서 에지 고장을 고려하여 매칭 배제(matching preclusion)라고 부르는 새로운 개념을 제안하였다. 이 개념은 이론적으로도 조건 연결도(conditional connectivity), 극단 그래프 이론(extremal graph theory) 등과 관련된다[4].

그래프에서 *완전 매칭(perfect matching)*은 에지들의 집합으로 각 정점은 모두 이 집합에 속하는 정확히 한 에지와 인접하다는 조건을 만족한다. *준완전 매칭(almost perfect matching)*도 에지 집합인데, 한 정점을 제외한 모든 정점이 이 집합에 속하는 정확히 한 에지와 인접하다. 그래프가 완전 매칭을 가지면 정점수가 짝수이고, 준완전 매칭을 가지면 정점수가 홀수이다. 그래프 G의 *매칭 배제수(matching preclusion number)*는 $mp(G)$라고 쓰고, G가 완전 매칭이나 준완전 매칭을 가지지 않도록 삭제해야하는 에지의 최소 개수라고 정의한다. 이때 삭제되는 에지 집합을 *매칭 배제 집합(matching preclusion set)*이라고 하고, 원소의 수가 최소인 매칭 배제 집합을 최소 매칭 배제 집합이라고 한다. 완전 매칭이나 준완전 매칭을 가지지 않는 그래프의 매칭 배제수는 0이다.

매칭 배제 문제는 어떤 주어진 시각에 모든 정점은 반드시 짝이 있어야 하며 에지 고장이 발생할 수 있는 응용 분야에 적용될 수 있다[4]. 이 경우 매칭 배제수는 가능한 크고, 최소 매칭 배제 집합의 개수는 가능한 작은 상호연결망이 선호된다. 정점의 개수가 짝수인 그래프에서 한 정점에 인접한 에지를 모두 삭제하면 완전 매칭이 존재하지 않게 된다. 따라서 아래 보조 정리와 같이 매칭 배제수의 상한을 얻을 수 있다.

보조 정리 1 G를 정점의 수가 짝수인 그래프라고 하자. 그러면 $mp(G) \le \delta(G)$이다. 여기서 $\delta(G)$는 G의 최소 분지수이다.

[4]에서는 완전 그래프, 완전 이분 그래프, 그리고 하이퍼큐브에 대한 매칭 배제수가 분석되었고, 또한 모든 최소 매칭 배제 집합이 규명되었다. 이후 [5]에서 치환(transposition)에 의해 생성된 Cayley 그래프와 (n,k)-스타 그래프에 대한 매칭 배제 문제가 연구 발표되었다. 이 논문에서는 제한된 HL-그래프라고 불리는 하이퍼큐브형 상호연결망과 재귀원형군 $G(2^m,4)$에 대한 매칭 배제수를 분석하고 최소 매칭 배제 집합을 규명하고자 한다.

제한된 HL-그래프는 [6]에서 제안된 하이퍼큐브형 상호연결망 부류이다. 문헌에 소개된 많은 하이퍼큐브형 상호연결망이 제한된 HL-그래프 부류에 속한다는 사실이 [6]에서 밝혀졌다. 제한된 HL-그래프에 속하는 것들로는 twisted cube, crossed cube, multiply twisted cube, Möbius cube, Mcube, generalized twisted cube 등이 있다. 하이퍼큐브형 상호연결망에서 제한된 HL-그래프가 아닌 것으로는 재귀원형군 $G(2^m,4)$이 있고, '이분 그래프에 상당히 가까운' twisted N-cube가 있다. 재귀원형군 $G(2^m,4)$은 (m이 짝수인 경우는 아니지만) m이 홀수인 경우는 역시 제한된 HL-그래프에 속한다고 알려져 있다.

재귀원형군은 [7]에서 제안된 다중컴퓨터의 연결망 구조이다. 재귀원형군 $G(N,d)$는 N개의 노드 $\{v_0, v_1, \cdots, v_{N-1}\}$을 가지고 $s+d^i \equiv t \pmod N$을 만족하는 정수 i, $0 \le i \le \lceil \log_d N \rceil - 1$이 존재하면 두 노드 v_s, v_t를 잇는 에지가 있다. 이 에지 (v_s, v_t)의 크기는 d^i이라고 한다. $G(N,d)$는 N개의 정점을 가지고 N보다 작은 모든 d의 거듭 제곱을 점프로 가지는 circulant 그래프라고 정의할 수도 있다. 이 논문에서는 N이 2^m, d가 4로 제한된 재귀원형군 $G(2^m,4)$를 고려한다. $G(2^m,4)$는 분지수와 연결도가 모두 m이며 지름이 $\lceil (3m-1)/4 \rceil$로써 하이퍼큐브 Q_m의 지름 m보다 짧다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 먼저 2절에서 고장 해밀톤 성질과 매칭 배제수의 관계를 살펴본 다음, 각각 3절과 4절에서 제한된 HL-그래프와 재귀원형군 $G(2^m,4)$에 대한 매칭 배제 문제를 고찰한다. 마지막으로 4절에서 결론을 맺기로 한다.

2 고장 해밀톤 성질

임의의 노드 쌍 v, w에 대해서 v와 w를 연결하는 해밀톤 경로를 가진 그래프를 *해밀톤 연결된(hamiltonian-connected)* 그래프라고 한다. 그래프 G에 있는 f개 혹은 그 이하의 요소(정점이나 에지)에 고장이 발생하여 이들 고장인 요소를 삭제하더라도 G가 해밀톤 사이클을 가지면, G를 *f-고장 해밀톤 그래프*(*f-fault hamiltonian*)라고 말한다. f개 혹은 그 이하의 요소에 고장이 발생하더라도 해밀톤 연결되어 있으면, *f-고장 해밀톤 연결된 그*

*래프(f-fault hamiltonian-connected)*라고 한다.

보조 정리 2 G를 정점의 개수가 짝수인 $\delta(G)-2$-고장 해밀톤 그래프라고 하자. 그러면 $mp(G)=\delta(G)$이다.

증명 $|F|\le\delta(G)-1$인 임의의 고장 에지 집합 F에 대하여, $G\setminus F$가 완전 매칭을 가짐을 보인다. 임의의 고장 에지 하나 e_f를 선택하여 가상의 정상 에지라고 두고, $G\setminus(F-e_f)$에서 해밀톤 사이클 C을 찾는다. C의 에지는 두 개의 서로소인 완전 매칭 M_1, M_2으로 분할될 수 있음을 관찰한다. C에 최대 한 개의 고장 에지가 있을 수 있으므로, 분할된 매칭중 하나는 고장 에지를 포함하지 않는다. □

제한된 HL-그래프의 고장 해밀톤 성질이 아래와 같이 [6]에서 알려져 있다. 이 결과를 확장하여 고장이 있는 제한된 HL-그래프의 두 정점을 잇는 다양한 길이의 경로가 존재하는가하는 panconnectivity 문제와 다양한 길이의 사이클이 존재하는가하는 pancyclicity 문제가 [8]에서 연구 발표되었다.

보조 정리 3 [6] 임의의 m-차원 제한된 HL-그래프는 $m-3$-고장 해밀톤 연결되어 있고 $m-2$-고장 해밀톤 그래프이다($m\ge 3$).

분지수가 3 이상인 재귀원형군 $G(N,d)$는 해밀톤 연결되어 있다[7]. 이분 그래프가 아닌 재귀원형군 $G(cd^m,d)$의 고장 해밀톤 성질이 [9]에 발표되어 있다. $G(cd^m,d)$는 c가 짝수이고 동시에 d가 홀수일 때만 이분그래프이다. $G(2^m,4)$의 고장 해밀톤 성질은 아래와 같이 알려져 있다. 이를 확장한 $G(2^m,4)$의 panconnectivity와 pancyclicity 문제는 [10]에서 연구되었다.

보조 정리 4 [6,9] (a) 재귀원형군 $G(2^m,4)$는, $m\ge 3$, $m-3$-고장 해밀톤 연결되어 있고 $m-2$-고장 해밀톤 그래프이다.
(b) $G(2^m,4)$와 K_2의 곱 $G(2^m,4)\times K_2$는, $m\ge 3$, $m-2$-고장 해밀톤 연결되어 있고 $m-1$-고장 해밀톤 그래프이다.

이 논문에서 그래프의 경로는 정점의 열(sequence)로 나타내기로 한다.

3 제한된 HL-그래프

정점의 수가 각각 n인 두 그래프 G_0와 G_1이 있다고 하자. 그래프 G_i의 정점 집합을 V_i, 에지 집합을 E_i라고 나타내기로 한다. $V_0=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$이라고 하고, $V_1=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$이라고 하자. $\{1,2,\cdots n\}$의 순열(permutation) $M=(i_1,i_2,\cdots,i_n)$에

대하여, 두 그래프 G_0와 G_1을 다음과 같이 $2n$개의 정점을 가진 하나의 그래프 $G_0 \oplus_M G_1$으로 묶을 수 있다: 정점 집합 $V = V_0 \cup V_1$이고, 에지 집합 $E = E_0 \cup E_1 \cup E_{0,1}$, 여기서 $E_{0,1} = \{(v_i, w_{i_j}) | 1 \le j \le n\}$이다. 임의의 순열 M에 대하여, G_0와 G_1을 묶어서 얻어지는 그래프를 $G_0 \oplus G_1$이라고 나타낸다. 여기서 G_0와 G_1 각각을 $G_0 \oplus G_1$의 *요소 그래프 (component)*라고 부른다.

*제한된 HL-그래프(restricted HL-graphs)*라고 불리는 그래프 부류는 다음과 같이 재귀적으로 정의한다: $RHL_0 = \{K_1\}$, $RHL_1 = \{K_2\}$, $RHL_2 = \{C_4\}$; $RHL_3 = \{G(8,4)\}$; $RHL_m = \{G_0 \oplus G_1 | G_0, G_1 \in RHL_{m-1}\}$, $m \ge 4$. 여기서 K_1, K_2는 정점의 수가 각각 1, 2인 완전 그래프이고, C_4는 정점의 수가 4인 사이클 그래프이다. 또한 Q_3은 3-차원 하이퍼큐브이고, $G(8,4)$는 정점의 수가 8이고 각각 크기 1, 4인 점프를 가진 재귀원형군이다. 재귀원형군 $G(8,4)$는 아래 그림 1에서 보는 것과 같다. RHL_m에 속하는 그래프를 *m-차원 제한된 HL-그래프*라고 부른다.

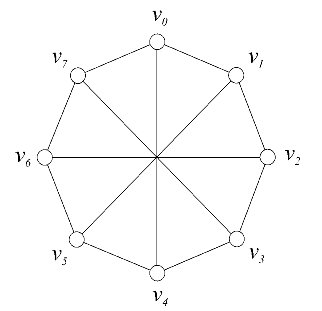

그림 1. 재귀원형군 $G(8,4)$

보조 정리 5 $G(8,4)$에 대해서 $mp(G(8,4)) = 3$이다. 최소 매칭 배제 집합은 한 정점에 인접한 에지 집합이거나, 혹은 $\{(v_0,v_4), (v_0,v_1), (v_3,v_4)\}$이거나 이와 대칭인 집합이다.

증명 보조 정리 2와 3에 의해서 $mp(G(8,4)) = 3$이 성립한다. F를 $|F| = 3$이고 모두 한 정점에 인접하지는 않는 에지 고장 집합이라고 하자. F가 $\{(v_0,v_4), (v_0,v_1), (v_4,v_3)\}$이거나 이와 대칭인 경우를 제외하고 $G(8,4) \setminus F$는 완전 매칭을 가짐을 보인다. $G(8,4)$에서 대각 에지들의 집합 $M_1 = \{(v_0,v_4), (v_1,v_5), (v_2,v_6), (v_3,v_7)\}$은 완전 매칭을 이룬다. M_1을 제거하고 남은 그래프는 해밀톤 사이클을 이루므로, 사이클 에지들은 다시 두 매칭 $M_2 = \{(v_0,v_1), (v_2,v_3), (v_4,v_5), (v_6,v_7)\}$, $M_3 = \{(v_1,v_2), (v_3,v_4), (v_5,v_6), (v_7,v_0)\}$으로 분할된다. F에 속한 에지가 각 M_i에 하나씩 속한 경우가 아니면 $G(8,4) \setminus F$에서 완전 매칭을 찾을 수 있으므로, 각 M_i에 고장 에지가 하나씩 존재한다고 가정한다.

일반성을 잃지 않고 $(v_0,v_4) \in F$라고 둔다. 에지 집합 $Y = \{(v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_5,v_6), (v_6,v_7)\}$에서 최소한 하나가 고장인 경우를 고려한다. $(v_0,v_1,v_5,v_4,v_3,v_7)$이 고장 에지를 최대 하나 포함하는 사이클을 이루므로, 이 사이클에서 선택한 세 에지와 (v_2,v_6)은

$G(8,4)\setminus F$의 완전 매칭이 된다. 이제 (v_0,v_1), $(v_3,v_4)\in F$인 경우가 남아 있다. (v_0,v_7), $(v_4,v_5)\in F$인 경우는 이와 대칭이다. $G(8,4)\setminus F$에서 v_0와 v_4의 분지수가 1이므로 (v_0,v_7), (v_4,v_5)는 매칭에 포함되어야 하지만, 매칭에 관련된 정점을 제거하고 남은 정점들로 유도되는(induced) 그래프는 완전 이분 그래프 $K_{1,3}$와 동형이어서 완전 매칭이 존재하지 않는다. 따라서 증명이 끝났다. □

$G_0\oplus G_1$에 있는 정점 v에 대하여 v에 인접하면서 v와 다른 요소 그래프에 속한 정점을 $\overline{v}$로 나타내기로 한다.

정리 1 임의의 m-차원 제한된 HL-그래프 G^m에 대해서 $mp(G^m)=m$이다($m\geq 4$). 더구나 최소 매칭 배제 집합은 모두 어떤 한 정점에 인접한 에지들의 집합이다.

증명 보조 정리 2와 3에 의해서, $mp(G^m)=m$임은 명백하다. F를 $|F|=m$인 고장 에지들의 집합이라고 둔다. F에 속한 에지들이 모두 어떤 한 정점에 인접한 에지들이 아닐 때, $G^m\setminus F$가 완전 매칭을 가짐을 보인다. 증명은 m에 대한 수학적 귀납법이다. G_0, G_1을 G^{m-1}과 동형인(isomorphic) 그래프라고 두면, G^m을 $G_0\oplus G_1$으로 나타낼 수 있다. $F_i=E_i\cap F,\ i=0,1$이라고 두고 $F_{0,1}=E_{0,1}\cap F$라고 하자.

경우 1: $F_{0,1}=\varnothing$인 경우.
$E_{0,1}$이 $G^m\setminus F$의 완전 매칭을 이룬다. 이제 $F_{0,1}\neq\varnothing$라고 가정한다.

경우 2: $|F_0|,|F_1|<m-1$인 경우.
귀납적 가설에 의해서 G_0, G_1은 각각 완전 매칭 M_0, M_1을 가진다. G_0, G_1의 정점 수가 짝수이므로 $M_0\cup M_1$은 $G^m\setminus F$의 완전 매칭이 된다.

경우 3: $|F_0|=m-1$이고 $|F_1|=0$인 경우. (혹은 대칭적으로 $|F_1|=m-1$이고 $|F_0|=0$)
G_0가 완전 매칭을 가진다면, 위 경우 2와 같이, G_0, G_1의 완전 매칭으로부터 $G^m\setminus F$의 완전 매칭을 얻을 수 있다. G_0가 완전 매칭을 가지지 않는다고 가정한다. $G^m\setminus F$가 해밀톤 경로를 가지고 있음으로 보인다. 해밀톤 경로를 따라 가면서 홀수 번째로 지나는 에지들은 당연히 $G^m\setminus F$의 완전 매칭을 이룬다.

F_0에 속한 에지가 모두 G_0의 한 정점 x에 인접한 경우를 먼저 고려한다. 가정에 의하여 $(x,\overline{x})$는 정상인 에지이다. 어떤 정상인 에지 $(y,\overline{y})$에, $y\in V_0$, $\overline{y}\in V_1$, 대하여 G_1에서 $\overline{x}$와 $\overline{y}$를 잇은 해밀톤 경로 P_1을 찾는다. 보조 정리 3에 의해서 P_1은 존재한다. G_0에서 x를 가상의 고장인 정점이라고 두고 해밀톤 사이클 C_0를 찾는다. C_0도 보조 정리 3에 의해서 존재한다. $G_0\setminus x$는 어떤 고장 에지도 포함하지 않음에 유의한다. C_0가 y를 지나므로 $C_0=(y,a,\ldots,b)$라고 두자. 그러면 $(x,P_1,C_0\setminus(y,b))$는 x와 b를 잇는 $G^m\setminus F$의 해밀톤 경로가 된다.

마지막으로 F_0에 속한 에지 모두가 G_0의 한 정점에 인접하지는 않는 경우를 고려한다. 귀납적 가설에 의해서 $m=4$이고, 또한 보조 정리 5에 의해서 일반성을 잃지 않고 고장 에지를 (v_0,v_1), (v_0,v_4), (v_3,v_4)라고 둘 수 있다. G_0에는 서로소이면서 G_0의 정점을 모두 커버하는 두 경로 $P_0=(v_1,v_2,v_3)$, $P_0'=(v_4,v_5,v_6,v_7,v_0)$이 존재한다. 각 경로의 양끝 정점중 하나는 $F_{0,1}$에 속한 에지와 인접하지 않다. 그 끝점을 각각 일반성을 잃지 않고 v_3, v_4라고 둔다. P_1을 $\overline{v_3}$, $\overline{v_4}$를 잇는 G_1의 해밀톤 경로라고 두면, (P_0,P_1,P_0')은 $G^m \setminus F$의 해밀톤 경로가 된다. 따라서 정리 1의 증명이 끝났다. □

4 재귀원형군 $G(2^m,4)$

재귀원형군의 기본적인 성질은 [7]에 소개되어 있다. 재귀원형군 $G(N,d)$는 $N=cd^m$, $1\le c< d$일 때 재귀적 구조를 갖는다. $G(cd^m,d)$, $m\ge 1$는 다음과 같이 d개의 $G(cd^{m-1},d)$를 이용하여 설계할 수 있다. $G_i(V_i,E_i)$, $0\le i< d$를 $G(cd^{m-1},d)$와 동형인 그래프라고 하고 $V_i=\{v_0^i, v_1^i, \cdots, v^i_{cd^{m-1}-1}\}$라 두자. 그리고 G_i는 v_j^i을 v_j에 대응시키는 사상에 의해서 $G(cd^{m-1},d)$와 동형이라고 하자. v_j^i를 v_{jd+i}로 다시 레이블한 다음, 정점 집합을 $\bigcup_{0\le i< d} V_i$이라고 두고, 에지 집합을 $\bigcup_{0\le i< d} E_i \cup X$이라고 두면 $G(cd^m,d)$가 정의된다. 여기서 X는 크기가 1인 에지의 집합으로 $\{(v_j,v_{j'}) \mid j+1\equiv j' \pmod{cd^m}\}$이다. $G(2^m,4)$는 $G(cd^m,d)$ 부류에 속하므로 당연히 재귀적 구조를 갖는다. $G(2^m,4)$의 재귀적 구조에서는 $G(2^{m-2},4)$와 동형인 요소 그래프 G_0, G_1, G_2, G_3에 크기가 1인 에지가 2^m개 추가되어 있다.

m이 홀수인 재귀원형군 $G(2^m,4)$는 제한된 HL-그래프 부류에 속한다. 따라서 이들에 대한 매칭 배제 문제는 앞 절에서 고찰한 제한된 HL-그래프의 매칭 배제 문제로 설명된다. m이 짝수인 $G(2^m,4)$의 매칭 배제 문제를 살펴보기로 한다.

보조 정리 6 재귀원형군 $G(16,4)$에 대해서 $mp(G(16,4))=4$이다. 더구나 최소 매칭 배제 집합은 모두 어떤 한 정점에 인접한 에지들의 집합이다.

증명 보조 정리 2와 4에 의해서, $mp(G(16,4))=4$임을 알 수 있다. 어떤 한 정점에 모두 인접하지는 않은 고장인 에지 집합 F가 있고, $|F|=4$라고 하자. $G(16,4)\setminus F$가 완전 매칭을 가짐을 보인다. $G(16,4)$의 재귀적 구조에서 요소 그래프 사이를 잇는 에지 집합 X에 고장 에지가 하나 이하인 경우는, X에 속한 에지만으로 완전 매칭을 만들 수 있다. 고장이 없는 경우 X는 해밀톤 사이클을 이룸에 유의한다. $|X\cap F|\ge 2$임을 가정한다. 모든 i에 대하여 $(i=0,1,2,3)$, G_i에 고장 에지가 하나 이하인 경우는 각 G_i가 완전 매칭을 가지므로, 그것

들의 합집합은 $G(16,4)\setminus F$의 완전 매칭이 된다. 이제 G_0와 X에 각각 두 개의 고장 에지가 있다고 가정한다. G_0에 있는 두 고장 에지는 모두 어떤 정점 w에 인접하다고 가정할 수 있다; 그렇지 않다면, 위와 같이 각 G_i의 완전 매칭으로부터 $G(16,4)\setminus F$의 완전 매칭을 얻게 된다.

G_0와 G_1 사이의 에지 집합 $E_{0,1}$에 고장인 에지가 존재하지 않거나 혹은 하나 존재하지만 w에 인접하지 않다면, G_0와 G_1으로 유도된 그래프는 3-차원 하이퍼큐브와 동형이므로 [4]에 의하여 완전 매칭이 존재한다. G_2와 G_3의 완전 매칭과 함께 $G(16,4)\setminus F$의 완전 매칭을 이룬다. 마찬가지로 G_0와 G_3 사이의 에지 집합 $E_{0,3}$에 고장인 에지가 존재하지 않거나 혹은 하나 존재하지만 w에 인접하지 않다면 $G(16,4)\setminus F$의 완전 매칭을 얻을 수 있다. $E_{0,1}$와 $E_{0,3}$에 하나씩 고장 에지가 존재하고 모두 w에 인접한 경우는 존재하지 않는다; 만약 그렇게 된다면, 고장 에지 네 개가 모두 w에 인접하게 되기 때문이다. □

정리 2 재귀원형군 $G(2^m,4)$에 대해서 $mp(G(2^m,4))=m$이다($m\geq 4$). 더구나 최소 매칭 배제 집합은 모두 어떤 한 정점에 인접한 에지들의 집합이다.

증명 보조 정리 2와 4에 의해서, $mp(G(2^m,4))=m$임은 자명하다. 최소 매칭 배제 집합이 한 정점에 인접한 에지들의 집합임을 보인다. $G(2^m,4)$의 재귀적 구조를 고려해 보면, $G(2^m,4)$가 $[G(2^{m-2},4)\times K_2]\oplus[G(2^{m-2},4)\times K_2]$ 그래프 부류에 속함을 쉽게 관찰할 수 있다. m에 대한 strong induction으로 $m\geq 4$인 경우에 $G(2^m,4)$뿐만 아니라 $G(2^{m-1},4)\times K_2$도 정리의 성질을 만족함을 증명하고자 한다. $m=4$일 때 보조 정리 6과 정리 1에 의해서 성립한다. G^m을 분지수가 $m(\geq 5)$인 $G(2^m,4)$나 혹은 $G(2^{m-1},4)\times K_2$라고 하자. 그러면 G^m을 $G^{m-1}\oplus G^{m-1}$라고 표현할 수 있다. 여기서 G^{m-1}은 위 정리의 성질뿐만 아니라 $m-4$-고장 해밀톤 연결되어 있고 $m-3$-고장 해밀톤 그래프라는 고장 해밀톤 성질을 가진다. 고장 해밀톤 성질은 보조 정리 4에 의해서 성립한다. 따라서 정리 1의 증명에서 m-차원 제한된 HL-그래프 대신에 G^m, $m-1$-차원 제한된 HL-그래프 대신에 G^{m-1}을 대입하면 정리 2의 증명이 완성된다. 여기서 중복하여 증명을 기술하지 않기로 한다. □

5 결론

이 논문에서는 m-차원 제한된 HL-그래프와 재귀원형군 $G(2^m,4)$에서 매칭 배제 문제를 고려하여, 두 그래프 모두 $m\geq 4$인 경우 매칭 배제수는 m으로 분지수와 같은 값을 가지며, 크기 m인 최소 매칭 배제 집합은 모두 한 정점에 인접한 에지들의 집합임을 증명하였다. 그래프의 매칭 배제 문제는 에지 고장만을 고려하여, 에지를 제거하고 남은 스패닝 그래프에 완전 매칭 혹은 준완전 매칭이 존재하는지를 다루고 있다. 정점이나 에지 고장을 동시에 고려함으로서 매칭 배제 문제를 일반화할 수 있는데, 주요 상호연결망에서 일반화된 매칭 배제 문제는 연구할 가치가 있다고 생각된다.

참고문헌

[1] D.A. Reed and R.M. Fujimoto, *Multicomputer Networks: Message-Based Parallel Processing*, The MIT Press, 1987.

[2] A.-H. Esfahanian, "Generalized measures of fault tolerance with application to n-cube networks," *IEEE Trans. Computers* **38(11)**, pp. 1586-1591, 1989.

[3] D. Kratsch, T. Kloks, and H. Muller, "Measuring the vulnerability for classes of intersection graphs," *Discrete Applied Mathematics* **77**, pp. 259-270, 1997.

[4] R.C. Brigham, F. Harary, E.C. Violin, J. Yellen, "Perfect-matching preclusion," *Congressus Numerantium* **174**, pp. 185-192, 2005.

[5] E. Cheng and L. Lipták, "Matching preclusion for some interconnection networks," *Networks* **50**, pp. 173-180, 2007.

[6] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Fault-hamiltonicity of hypercube-like interconnection networks," in *Proc. of the IEEE International Parallel & Distributed Processing Symposium IPDPS 2005*, Apr. 2005.

[7] J.-H. Park and K.Y. Chwa, "Recursive circulants and their embeddings among hypercubes," *Theoretical Computer Science* **244**, pp. 35-62, 2000.

[8] J.-H. Park, H.-S. Lim, and H.-C. Kim, "Panconnectivity and pancyclicity of hypercube-like interconnection networks with faulty elements," *Theoretical Computer Science* **377**, pp. 170-180, 2007.

[9] C.-H. Tsai, J.M. Tan, Y.-C. Chuang, and L.-H. Hsu, "Fault-free cycles and links in faulty recursive circulant graphs," in *Proc. of Workshop on Algorithms and Theory of Computation ICS2000*, pp. 74-77, 2000.

[10] J.-H. Park, "Panconnectivity and edge-pancyclicity of faulty recursive circulant $G(2^m,4)$," *Theoretical Computer Science* (to appear).