

재귀원형군의 일대일 서로소인 경로 커버*

박 정흠

가톨릭대학교 컴퓨터정보공학부
420-743 경기도 부천시 원미구 역곡 2동 산 43-1
j.h.park@catholic.ac.kr
전화 (032) 340-3366, 팩스 (032) 340-3777

One-to-One Disjoint Path Covers in Recursive Circulants

Jung-Heum Park

School of Computer Science and Information Engineering
The Catholic University of Korea
Yokkok 2-dong 43-1, Wonmi-gu, Puchon City, Kyonggi-do 420-743
j.h.park@catholic.ac.kr
TEL (032) 340-3366, FAX (032) 340-3777

* 본 연구는 2003년도 가톨릭대학교 교비연구비의 지원으로 이루어졌음.

재귀원형군의 일대일 서로소인 경로 커버

One-to-One Disjoint Path Covers in Recursive Circulants

요약

이 논문에서는 주어진 두 정점 사이에 다른 모든 정점을 정확히 한번 지나서 k 개의 서로소인 경로가 존재하는가 하는 일대일 서로소인 경로 커버 문제를 제안한다. 임의의 k , 임의의 두 정점 사이에 일대일 서로소인 경로 커버를 가지는 그래프는 해밀톤 연결되어 있다는 것보다 강한 해밀톤 성질을 가진다. 재귀원형군에서 이 문제를 고찰하여, 임의의 k ($1 \leq k \leq m$)에 대해서 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 은 임의의 두 정점 사이에 k 개의 경로로 이루어진 일대일 서로소인 경로 커버가 존재함을 보인다.

키워드: 서로소인 경로, 경로 커버, 강한 해밀톤 성질, 재귀원형군.

Abstract

In this paper, we propose a problem, called one-to-one disjoint path cover problem, whether or not there exist k disjoint paths joining a pair of vertices which pass through all the vertices other than the two exactly once. A graph which for an arbitrary k , has a one-to-one disjoint path cover between an arbitrary pair of vertices has a hamiltonian property stronger than hamiltonian-connectedness. We investigate this problem on recursive circulants and prove that for an arbitrary k ($1 \leq k \leq m$), $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ has a one-to-one disjoint path cover consisting of k paths between an arbitrary pair of vertices.

Key words: disjoint path, path cover, strong hamiltonicity, recursive circulant.

* 본 연구는 2003년도 가톨릭대학교 교비연구비의 지원으로 이루어졌음.

1 서론

다중 컴퓨터 네트워크에서 고장 감내에 관한 공통적인 개념은 역시 연결망 구조의 연결도(connectivity)일 것이다. 연결도가 $\kappa(G)$ 인 연결망은 임의의 $\kappa(G)-1$ 개 혹은 그 이하의 노드에 고장이 발생하더라도 연결망이 분리되지 않는다는 보장이 있다. Menger 정리에 의하면 연결도가 $\kappa(G)$ 인 그래프는 임의의 두 정점 사이에 $\kappa(G)$ 개의 (양끝 정점을 제외하고) 정점이 서로소인 경로가 존재한다는 것이다[1]. 연결망 구조는 그래프로 자연스럽게 모델할 수 있는데, 이 때 노드는 그래프의 정점에 대응되고 통신 링크는 에지에 대응된다.

그래프의 연결도가 서로소인 경로라는 개념으로 그 특성이 설명된 후 서로소인 경로라는 개념은 통신망에서 라우팅(routing)이나 고장 감내(fault tolerance) 등에 널리 응용되고 있다. 라우팅은 노드들 사이에 메시지를 전송하는 절차이고, 그것의 효율성은 다중 컴퓨터의 성능에 아주 큰 영향을 미치는 요소로 평가된다. 효율적이고 신뢰성 있는 라우팅은 노드들 사이에 노드가 서로소인 경로를 이용함으로써 실현될 수 있다. 왜냐하면 그것은 혼잡성(congestion)을 피하고, 전송률을 높이고, 또 다른 통신 경로를 제공할 수 있기 때문이다. 서로소인 경로는 라우팅, 신뢰성(reliability), 고장 감내를 연구할 때 자연스럽게 대두되는 기본적인 개념인 것이다.

서로소인 경로는 출발 정점과 도착 정점의 수에 따라 다음과 같이 세 가지 유형으로 분류할 수 있다: 일대일(one-to-one), 일대다(one-to-many), 다대다(many-to-many). 출발 정점과 도착 정점이 모두 하나이면 일대일, 도착 정점만 여럿이면 일대다, 그리고 출발과 도착 정점 모두가 여럿이면 다대다 서로소인 경로라고 부른다. 출발 정점이나 도착 정점이 유일할 때는 그 정점의 중복이 허용된다. 서로소인 경로라는 개념을 사용하여 정의하고 있는 것으로 다음과 같은 것이 있다.

광폭 지름 (wide-diameter) 통신망의 성능을 결정하는 가장 중요한 척도로 여겨지는 것은 연결도와 지름(diameter)일 것이다. 그래프에 있는 두 정점 v , w 사이의 거리는 v 와 w 를 잇는 최단 경로의 길이를 말한다. 두 정점 v 와 w 사이의 k -거리(k -distance)는, v 와 w 사이에 길이가 l 이하인 k 개의 서로소인 경로가 존재하는 최소의 l 이다. 그래프에서 지름이라는 것은 가장 거리가 먼 두 정점 사이의 거리를 말한다. 거리를 k -거리라는 개념으로 확장하면, 다음과 같이 k -지름을 정의할 수 있다[2]. 그래프 G 에서 임의의 두 정점 쌍에 대한 k -거리의 최댓값을 k -지름이라고 한다. 특히 k 가 그래프의 연결도 κ 와 같을 때의 k -지름, 즉 κ -지름을 G 의 광폭 지름이라고 말한다. 광폭 지름의 기본 개념은 길이가 짧은 일대일 서로소인 경로이다.

Rabin의 수(Rabin number) 그래프 G 의 한 정점 v 와 서로 다른 k 개의 정점 w_1, w_2, \dots, w_k 가 주어져 있을 때, v 를 출발 정점으로 하고 도착 정점이 각각 $w_i (1 \leq i \leq k)$ 인 k 개의 서로소인 경로를 생각할 수 있다. 이들 k 개의 경로 길이의 최댓값을 최소화하는 값을 l 이라고 하자. 모든 가능한 출발 정점과 도착 정점들에서 최대인 l 값을 G 의 Rabin의 수라

고 한다[3]. Rabin의 수의 기본 개념은 길이가 짧은 일대다 서로소인 경로이다.

스타형 트리(star-like tree) Rabin의 수와 같이 스타형 트리도 일대다 유형의 서로소인 경로를 말한다. 스타형 트리는 한 출발 정점으로부터 다른 도착 정점들을 고정하지 않고 다만 출발 정점으로부터의 거리를 고정한 것이다. 스타형 트리는 루트(root)를 제외한 다른 모든 내부 노드(internal node)가 하나의 자식 노드만을 가지는 트리를 말한다[4]. 스타형 트리에서는 루트의 분지수와 리프 노드(leaf)의 수가 같다. 루트로부터 k 개의 리프 노드까지의 거리를 나타내는 정수 k 개로 스타형 트리를 표현할 수 있다. 길이가 최대인 일대다 서로소인 경로 유형이다.

그래프의 경로 분할(partition of a graph into paths) 여러 개의 출발 정점들은 고정되어 있지만, 스타형 트리와 마찬가지로 도착 정점들을 고정하지 않고 길이를 고정한 서로소인 경로를 말한다[5]. 이때 그래프의 모든 정점은 정확히 한 경로에 속해야 한다. 길이의 합이 최대인 다대다 서로소인 경로 유형이다.

광폭 지름이나 Rabin의 수에서는 길이가 짧은 서로소인 경로를 염두에 둔 것이고, 스타형 트리나 그래프의 경로 분할은 길이가 긴 서로소인 경로를 염두에 둔 것이다. 또한 앞의 것은 출발 정점과 도착 정점이 고정된 것인 반면 뒤의 것은 출발 정점은 고정되어 있지만 도착 정점은 고정되어 있지 않다는 차이가 있다. 출발 정점과 도착 정점은 고정되어 있지만, 스타형 트리나 그래프의 경로 분할에서와 같이 그 길이가 최대인 서로소인 경로를 생각해 볼 수 있다. 길이가 최대라는 것은 서로소인 경로에서 가장 짧은 경로가 최대가 된다는 것으로 구체화할 수 있겠지만, 이 논문에서는 그 경로 길의 합이 최대인, 따라서 모든 정점이 최소한 한 경로에 포함되는 서로소인 경로들로 구체화한다. 그렇게 되면 서로소인 경로들은 그래프에 있는 정점을 커버(cover)한다는 개념으로 정리할 수 있게 되는데, 이렇게 그래프에 있는 모든 정점을 커버하는 서로소인 경로들을 *서로소인 경로 커버(disjoint path cover)*라고 부르기로 한다.

이 논문에서는 출발 정점과 도착 정점이 모두 하나로 고정된 일대일 서로소인 경로 커버를 고찰한다. 두 정점 v 와 w 를 잇는 k 개의 경로로 이루어진 일대일 서로소인 경로 커버를 v 와 w 사이의 일대일 $DPC(k)$ 라고 하자. 아래와 같은 명제가 성립한다. 따라서 모든 k ($1 \leq k \leq \kappa(G)$)에 대해서 임의의 두 정점 사이에 일대일 $DPC(k)$ 가 존재하다는 것은 해밀톤 연결된(hamiltonian-connected) 것 이상으로 강한 어떤 해밀톤 성질을 가진다는 것을 의미한다. 여기서 해밀톤 연결된 그래프라는 것은 임의의 두 정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재하는 그래프를 말한다.

명제 1 (a) 어떤 두 정점 사이에 일대일 $DPC(2)$ 가 존재한다는 것은 해밀톤 사이클(hamiltonian cycle)을 가진 해밀톤 그래프라는 것과 동치이다. (b) 임의의 두 정점 사이에 일대일 $DPC(1)$ 이 존재한다는 것은 해밀톤 연결된 그래프라는 것과 동치이다.

재귀원형군은 해밀톤 연결된 그래프라고 알려져 있다[6]. 우리는 재귀원형군에서 모든 k

($1 \leq k \leq \kappa(G)$)에 대해서 임의의 두 정점 사이에 일대일 $DPC(k)$ 가 존재하는지에 관심이 있다. 재귀원형군은 [6]에서 제안된 다중컴퓨터의 연결망 구조이다. 재귀원형군 $G(N, d)$ 는 N 개의 정점 $\{v_0, v_1, \dots, v_{N-1}\}$ 을 가지고 $s + d^i \equiv t \pmod{N}$ 을 만족하는 정수 i , $0 \leq i \leq \lceil \log_d N \rceil - 1$ 가 존재하면 두 정점 v_s, v_t 를 잇는 에지가 있다. 이 에지 (v_s, v_t) 의 크기는 d^i 이라고 한다. 재귀원형군 $G(N, d)$ 의 연결도 $\kappa(G)$ 는 분지수 $\delta(G)$ 와 같다. 이 논문에서는 $N=2^m$ 과 $d=4$ 인 재귀원형군 $G(2^m, 4)$ 로 관심을 한정하여, 임의의 k ($1 \leq k \leq m$)에 대해서 $G(2^m, 4)$ 가 임의의 두 정점 사이에 일대일 $DPC(k)$ 를 가짐을 보인다. $G(2^m, 4)$ 의 연결도와 분지수는 모두 m 이다.

재귀원형군에 대한 연구로는 다음과 같은 것이 있다. 임베딩(embedding)에 대해서는 트리 임베딩과 [7-8], 하이퍼큐브 임베딩 [6] 등이 연구되었다. 사이클 특성에 대해서는, 에지가 서로소인 해밀톤 사이클로 분할하는 해밀톤 분할(hamiltonian decomposition)이 가능함이 밝혀져 있고 [9-11], 또 길이가 3부터 N 까지 임의의 길이의 사이클을 가진 pancyclic 그래프가 되는 재귀원형군의 부류가 발표되어 있다 [12]. 그리고 연결도를 일반화한 super-connectivity, super-edge-connectivity에 대한 연구가 발표되어 있고 [13], 일반적으로 주어진 그래프가 재귀원형군인지 아닌지를 판별하는 알고리즘에 대한 연구 [14-15] 등이 있다.

이 논문에서 따로 정의하지 않은 그래프 이론적인 용어는 [1]을 따른다. 이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서 재귀원형군에 대한 기본적인 성질을 살펴본 다음, 3절에서 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 는 모든 $k(1 \leq k \leq m)$ 에 대해서 임의의 정점쌍 v, w 사이에 일대일 $DPC(k)$ 가 존재함을 보인다. 마지막으로 4절에서 결론을 기술한다.

2 재귀원형군의 성질

재귀원형군의 기본적인 성질은 [6]에 잘 나타나 있다. 이 절에서는 논문의 전개에 필요한 성질을 간략히 소개하기로 한다. 우선 재귀원형군 $G(N, d)$ 는 정점 대칭이다. 즉 임의의 정점 v_i 를 v_j 에 대응시키는 동형사상(automorphism)이 존재한다. 또한 재귀원형군 $G(N, d)$ 는 $N = cd^m$, $1 \leq c < d$ 일 때 재귀적 구조를 갖는다. 다시 말하면, $G(cd^m, d)$ 는 아래 성질을 이용하여 재귀적으로 정의할 수 있다.

성질 1 V_i 를 다음과 같이 정의되는 $G(cd^m, d)$, $m \geq 1$ 의 정점 부분집합이라고 하자: $V_i = \{v_j \mid j \equiv i \pmod{d}\}$. 모든 $0 \leq i < d$ 에 대해서 V_i 로 유도된 $G(cd^m, d)$ 의 부그래프는 $G(cd^{m-1}, d)$ 와 동형(isomorphic)이다.

$G(cd^m, d)$, $m \geq 1$ 는 다음과 같이 d 개의 $G(cd^{m-1}, d)$ 를 이용하여 설계할 수 있다.

$G_i(V_i, E_i)$, $0 \leq i < d$ 를 $G(cd^{m-1}, d)$ 와 동형인 그래프라고 하고 $V_i = \{v_0^i, v_1^i, \dots, v_{cd^{m-1}-1}^i\}$ 라 두자. 그리고 G_i 는 v_j^i 을 v_j 에 대응시키는 사상에 의해서 $G(cd^{m-1}, d)$ 와 동형이라고 하자. v_j^i 를 v_{jd+i} 로 다시 레이블한 다음, 정점 집합을 $\bigcup_{0 \leq i < d} V_i$ 이라고 두고, 에지 집합을 $\bigcup_{0 \leq i < d} E_i \cup X$ 이라고 두면 $G(cd^m, d)$ 가 정의된다. 여기서 X 는 크기가 1인 에지의 집합으로 $\{(v_j, v_{j'}) \mid j+1 \equiv j' \pmod{cd^m}\}$ 이다. 4개의 $G(8, 4)$ 로 $G(32, 4)$ 을 설계한 예가 그림 1에 있다.

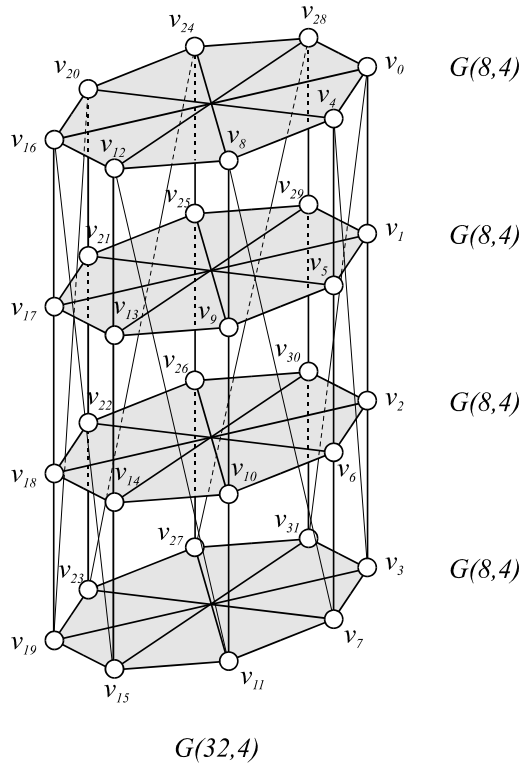


그림 1 $G(32, 4)$ 의 재귀적 구조

이 논문에서는 재귀원형군 $G(2^m, 4)$ 에 한정하여 관심을 두고 있다. 당연히 $G(2^m, 4)$ 는 $G(cd^m, d)$ 부류에 속하므로 재귀적 구조를 갖는다. $G(2^m, 4)$ 의 재귀적 구조에서는 $G(2^{m-2}, 4)$ 와 동형인 G_0, G_1, G_2, G_3 에 크기가 1인 에지가 2^m 개 추가되어 있다.

임의의 정점이나 에지를 k 개 혹은 그 이하를 제거하더라도 해밀톤 연결되어 있는 그래프를 k -고장 해밀톤 연결된 그래프, 해밀톤 사이클을 가진 그래프를 k -고장 해밀톤 그래프라고 말한다. 이분 그래프가 아닌 $G(cd^m, d)$ 는 $\delta(G) - 3$ -고장 해밀톤 연결된 그래프이며, $\delta(G) - 2$ -고장 해밀톤 그래프임이 [16]에서 밝혀졌다. 여기서 $\delta(G)$ 는 $G(cd^m, d)$ 의 분지수를 말하며, $G(cd^m, d)$ 는 c 가 짝수이고 동시에 d 가 홀수일 때만 이분그래프이다. 따라

서 $G(2^m, 4)$ 는 $m-3$ -고장 해밀톤 연결된 그래프이며, $m-2$ -고장 해밀톤 그래프임을 알 수 있다.

3 일대일 서로소인 경로 커버

$G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 은 모든 $k(1 \leq k \leq m)$ 에 대해서 임의의 정점쌍 v, w 사이에 일대일 $DPC(k)$ 가 존재함을 보인다. 우선 $G(2^3, 4)$ 와 $G(2^4, 4)$ 에 대한 서로소인 경로 커버를 설계하고, 이것을 기반으로 $G(2^m, 4) \times P_l$, $l \geq 2$ 의 서로소인 경로 커버를 설계한다. 최종적으로 $G(2^m, 4)$, $m \geq 5$ 의 서로소인 경로 커버를 설계하기로 한다. $k=1, 2$ 인 경우는 $G(2^m, 4)$ 가 해밀톤 연결된 그래프이므로 이미 임의의 두 정점 사이에 $DPC(k)$ 가 존재함을 알고 있다. 이후로는 특별한 언급이 없으면 $k \geq 3$ 인 $DPC(k)$ 를 설계하기로 한다.

두 그래프 G 와 H 의 곱 $G \times H$ 는 다음과 같이 정의된다. 정점의 집합은 $\{(v, w) | v \in V(G), w \in V(H)\}$ 이고, 두 정점 (v, w) 와 (v', w') 사이에 에지는 $v=v'$ 이고 $(w, w') \in E(H)$ 이거나 혹은 $w=w'$ 이고 $(v, v') \in E(G)$ 인 경우에만 존재한다. 여기서 $V(G)$ 와 $E(G)$ 는 각각 그래프 G 의 정점과 에지 집합을 말한다. P_l 은 정점의 수가 l 인 경로 그래프이다. P_l 의 정점 집합을 $\{w_0, w_1, \dots, w_{l-1}\}$ 이라고 하자. $G(2^m, 4)$ 과 P_l 의 그래프 곱 $G(2^m, 4) \times P_l$ 의 정점은 (v_i, w_j) 와 같이 나타나지만, 우리는 이것을 간단히 v_i^j 라고 표기하기로 한다. $V_j = \{v_i^j | 0 \leq i < 2^m\}$ 라고 하고 V_j 로 유도된(induced) 부그래프를 G_j 이라고 하자. 물론 G_j 는 $G(2^m, 4)$ 와 동형(isomorphic)이다. $G(2^m, 4) \times P_l$ 의 에지 중에 어떤 G_j 에도 속하지 않는 에지들을 세로 에지라고 부른다.

3.1 $G(2^3, 4)$ 와 $G(2^4, 4)$ 의 경로 커버

이 절에서는 $m=3, 4$ 일 때 $G(2^m, 4)$ 가 모든 $k(1 \leq k \leq m)$ 에 대해서 임의의 정점쌍 v, w 사이에 일대일 $DPC(k)$ 가 존재함을 보인다. 나중에 $G(2^m, 4) \times P_3$ 설계에 이용하기 위해서, $DPC(k)$ 중에 길이가 홀수인, 즉 짝수개의 중간 정점을 지나는 경로가 하나 이상 있는 $DPC(k)$ 를 설계한다. 정점의 수가 짝수이므로 k 가 홀수인 경우는 길이가 홀수인 경로가 반드시 존재하게 된다. $k=1, 2$ 인 경우는 이미 $DPC(k)$ 가 존재함을 알고 있지만, 길이가 홀수인 경로를 포함하는 $DPC(k)$ 가 존재함을 보이기 위해서 $k=2$ 인 경우 $DPC(2)$ 를 따로 설계하기로 한다.

$G(2^3, 4)$ 의 대칭성을 이용하여 $v=v_0$ 이고 $w=v_4, v_1, v_3, v_2$ 인 경우를 고려하면 충분하다. $w=v_1, v_3$ 인 경우 해밀톤 사이클 $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)$ 이, $w=v_4, v_2$ 인 경우는 또 다른

해밀턴 사이클 $(v_0, v_7, v_6, v_5, v_1, v_2, v_3, v_4)$ 가 바로 우리가 원하는 $DPC(2)$ 가됨을 관찰할 수 있다. 마찬가지로 $G(2^4, 4)$ 에서도 $v = v_0$ 이고 $w = v_1, v_5, v_9, v_{13}$ 인 경우 해밀턴 사이클 $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15})$ 가, 그리고 $w = v_4, v_8, v_{12}, v_2, v_6, v_{10}$ 인 경우 다른 해밀턴 사이클 $(v_0, v_{15}, v_{14}, v_{13}, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12})$ 가 $DPC(2)$ 가 된다.

이제 $G(2^3, 4)$ 의 일대일 서로소인 경로는 $k = 3$ 인 경우만 고려하면 된다. $w = v_4, v_1, v_3, v_2$ 인 각각의 경우에 대해서 아래 표 1은 $DPC(3)$ 을 보여준다. $v = v_0$ 라고 가정한다.

표 1 $G(2^3, 4)$ 의 $DPC(3)$

$w = v_4$	$(v_0, v_4), (v_0, v_1, v_2, v_6, v_5, v_4), (v_0, v_7, v_3, v_4)$
$w = v_1$	$(v_0, v_1), (v_0, v_4, v_3, v_2, v_1), (v_0, v_7, v_6, v_5, v_1)$
$w = v_5$	$(v_0, v_1, v_5), (v_0, v_4, v_5), (v_0, v_7, v_3, v_2, v_6, v_5)$
$w = v_2$	$(v_0, v_1, v_2), (v_0, v_4, v_5, v_6, v_2), (v_0, v_7, v_3, v_2)$

마찬가지 방식으로 $G(2^4, 4)$ 의 일대일 서로소인 경로 커버 $DPC(3)$ 와 $DPC(4)$ 가 다음 표 2와 3에 나타나 있다. $DPC(4)$ 에서 길이가 홀수인 경로를 포함하고 있음을 밑줄로 표시하였다.

표 2 $G(2^4, 4)$ 의 $DPC(3)$

$w = v_4$	$(v_0, v_4), (v_0, v_1, v_2, v_3, v_7, v_6, v_{10}, v_{11}, v_{15}, v_{14}, v_{13}, v_9, v_5, v_4), (v_0, v_{12}, v_8, v_4)$
$w = v_8$	$(v_0, v_4, v_8), (v_0, v_{12}, v_8), (v_0, v_{15}, v_{11}, v_7, v_3, v_2, v_1, v_5, v_6, v_{10}, v_{14}, v_{13}, v_9, v_8)$
$w = v_{12}$	$(v_0, v_4, v_8, v_{12}), (v_0, v_{12}), (v_0, v_1, v_2, v_3, v_7, v_6, v_5, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{15}, v_{14}, v_{13}, v_{12})$
$w = v_1$	$(v_0, v_1), (v_0, v_4, v_8, v_9, v_5, v_1), (v_0, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{11}, v_{10}, v_6, v_7, v_3, v_2, v_1)$
$w = v_5$	$(v_0, v_1, v_5), (v_0, v_4, v_5), (v_0, v_{15}, v_{14}, v_{13}, v_{12}, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_7, v_3, v_2, v_6, v_5)$
$w = v_9$	$(v_0, v_1, v_5, v_9), (v_0, v_4, v_8, v_9), (v_0, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{11}, v_7, v_3, v_2, v_6, v_{10}, v_9)$
$w = v_{13}$	$(v_0, v_1, v_5, v_9, v_{13}), (v_0, v_4, v_8, v_{12}, v_{13}), (v_0, v_{15}, v_{11}, v_7, v_3, v_2, v_6, v_{10}, v_{14}, v_{13})$
$w = v_2$	$(v_0, v_1, v_2), (v_0, v_4, v_5, v_6, v_2), (v_0, v_{15}, v_{14}, v_{13}, v_{12}, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_7, v_3, v_2)$
$w = v_6$	$(v_0, v_1, v_2, v_6), (v_0, v_4, v_5, v_6), (v_0, v_{12}, v_8, v_9, v_{13}, v_{14}, v_{10}, v_{11}, v_{15}, v_3, v_7, v_6)$

표 3 $G(2^4, 4)$ 의 $DPC(4)$

$w = v_4$	$(v_0, v_4), (v_0, v_{12}, v_8, v_4), (v_0, v_1, v_{13}, v_9, v_5, v_4), (v_0, v_{15}, v_{14}, v_{10}, v_{11}, v_7, v_6, v_2, v_3, v_4)$
$w = v_8$	$(v_0, v_4, v_8), (v_0, v_{12}, v_8), (v_0, v_1, v_5, v_6, v_2, v_3, v_7, v_8), (v_0, v_{15}, v_{11}, v_{10}, v_{14}, v_{13}, v_9, v_8)$
$w = v_{12}$	$(v_0, v_{12}), (v_0, v_4, v_8, v_{12}), (v_0, v_1, v_5, v_9, v_{13}, v_{12}), (v_0, v_{15}, v_{14}, v_{10}, v_6, v_2, v_3, v_7, v_{11}, v_{12})$
$w = v_1$	$(v_0, v_1), (v_0, v_4, v_8, v_9, v_5, v_1), (v_0, v_{12}, v_{11}, v_{10}, v_{14}, v_{13}, v_1), (v_0, v_{15}, v_3, v_7, v_6, v_2, v_1)$
$w = v_5$	$(v_0, v_1, v_5), (v_0, v_4, v_5), (v_0, v_{12}, v_8, v_7, v_{11}, v_{10}, v_{14}, v_{13}, v_9, v_5), (v_0, v_{15}, v_3, v_2, v_6, v_5)$
$w = v_9$	$(v_0, v_4, v_8, v_9), (v_0, v_1, v_2, v_3, v_7, v_6, v_5, v_9), (v_0, v_{12}, v_{11}, v_{10}, v_9), (v_0, v_{15}, v_{14}, v_{13}, v_9)$
$w = v_{13}$	$(v_0, v_1, v_{13}), (v_0, v_{12}, v_{13}), (v_0, v_4, v_8, v_7, v_3, v_2, v_6, v_5, v_9, v_{13}), (v_0, v_{15}, v_{11}, v_{10}, v_{14}, v_{13})$
$w = v_2$	$(v_0, v_1, v_2), (v_0, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_2), (v_0, v_4, v_8, v_7, v_3, v_2), (v_0, v_{15}, v_{11}, v_{10}, v_9, v_5, v_6, v_2)$
$w = v_6$	$(v_0, v_1, v_5, v_6), (v_0, v_4, v_3, v_2, v_6), (v_0, v_{12}, v_8, v_9, v_{13}, v_{14}, v_{10}, v_6), (v_0, v_{15}, v_{11}, v_7, v_6)$

위 관찰로부터 아래의 보조정리를 얻을 수 있다.

보조정리 1 $G(2^m, 4)$, $m=3, 4$ 는 모든 $k(1 \leq k \leq m)$ 에 대해서 임의의 정점쌍 v, w 사이에 $DPC(k)$ 가 존재한다. 더구나 $k \geq 2$ 일 때 설계한 $DPC(k)$ 에는 길이가 홀수인 경로가 존재한다.

3.2 $G(2^m, 4) \times P_l$ 의 경로 커버

이 절에서는 $G(2^m, 4) \times P_l$, $m \geq 3$, $l \geq 2$ 는 임의의 두 정점 사이에 $DPC(k)$, $1 \leq k \leq m+1$ 을 가짐을 보인다. $k=1, 2$ 일 경우에 임의의 두 정점 사이에 $DPC(k)$ 를 설계하기 위해서 $G(2^m, 4) \times P_l$ 이 해밀톤 연결된 그래프임을 증명하면 충분하는데, 그것은 $G(2^m, 4)$ 가 해밀톤 연결된 그래프임을 이용하여 쉽게 증명할 수 있다. 그 증명은 여기서 생략한다. l 에 대한 수학적 귀납법으로 $G(2^3, 4) \times P_l$ 과 $G(2^4, 4) \times P_l$ 이 G_0 에 있는 정점과 G_{l-1} 에 있는 정점 사이에 $DPC(k)$ 를 가짐을 보인 다음, 다시 m 에 대한 귀납법으로 $G(2^m, 4) \times P_l$ 이 $DPC(k)$ 를 가짐을 보이기로 한다.

보조정리 2 $m=3, 4$ 일 때, $G(2^m, 4) \times P_2$ 는 임의의 G_0 에 있는 정점 v 와 G_1 에 있는 임의의 정점 w 간에 $DPC(k)$, $1 \leq k \leq m+1$ 을 가진다. 더구나 $3 \leq k < m+1$ 인 경우는 $DPC(k)$ 의 어떤 경로도 v 나 w 와 인접한 세로 에지를 지나지 않는다.

증명 $G(2^m, 4) \times P_2$ 가 $k=1, 2$ 일 경우는 성립함을 알고 있으므로 $k=m-1, m$ 일 때를 고려한 후 $k=m+1$ 일 때를 고려한다. v 와 다른 G_0 의 한 정점을 x 를 택하는데, 그와 인접한 G_1 의 정점 x' 도 w 와 다른 정점이 되도록 한다. G_0 에 v 와 x 사이에 $DPC(k)$ 를 찾는다. $DPC(k)$ 에 속한 경로를 P_i , $1 \leq i \leq k$ 라고 하고, P_i 에서 마지막 정점 x 를 제거한 경로를 P'_i 라고 하자. G_1 에서도 x' 과 w 간의 $DPC(k)$ 를 찾는다. 그에 속한 경로를 Q_j , $1 \leq j \leq k$ 라

고 하고 시작 정점 x' 을 제거한 경로를 Q'_j 이라고 한다. P'_i 의 마지막 정점을 p_i 라고 하고 Q'_j 의 시작 정점을 q_j 라고 하자. p_i 들과 q_j 들 간에는 서로 인접한 쌍이 최소한 $k-1$ 개 존재한다. $k=m-1, m$ 임에 유의한다. 일반성을 잃지 않고, $1 \leq i \leq k-1$ 에 대해서 p_i 와 q_i 가 인접하다고 가정한다. 그러면 (P'_i, Q'_i) 는 v 와 w 간의 경로가 되고, 이들은 (P_k, Q_k) 와 함께 v 와 w 간의 $DPC(k)$ 가 된다.

이제 $k=m+1$ 인 경우를 증명하면 충분하다. v 에 인접한 G_1 의 정점을 v' , w 에 인접한 G_1 의 정점을 w' 이라고 하자. v 와 w 가 인접한 경우는 v 와 w 를 직접 잇는 경로 하나와 위에서 설계한 $DPC(m)$ 이 바로 원하는 $DPC(m+1)$ 이 된다. 이제 v 와 w' 의 거리가 2인 경우를 살펴본다. 동시에 v , w' 과 인접한 G_0 의 정점을 x 라고 하고, 그와 인접한 G_1 의 정점을 x' 이라고 하자. G_0 에서 v 와 x 사이의 $DPC(m)$ 을 찾는다. v 와 x 를 예지로 직접 잇는 경로를 P_1 , w' 을 지나는 경로를 P_2 , 나머지 경로를 P_3, \dots, P_m 이라고 하며 이들 경로가 x 에 도달하기 직전에 지나는 정점들을 p_3, \dots, p_m 이라고 한다. G_1 에서는 x' 과 w 사이에 $DPC(m)$ 을 구한다. x' 과 w 를 예지로 직접 잇는 경로를 Q_1 , v' 을 지나는 경로를 Q_2 , 그리고 나머지 경로들을 Q_3, \dots, Q_m 이라고 하며 이들 경로가 x' 바로 다음에 지나는 정점들을 q_3, \dots, q_m 이라고 한다. 일반성을 잃지 않고, $3 \leq i \leq m$ 에 대해서 p_i 와 q_i 는 서로 인접하다고 하자. 이제 v 와 w 사이의 $DPC(m+1)$ 을 다음과 같이 설계하면 된다: (P_1, Q_1) , (P_2-x, w) , (v, Q_2-x) , (P_i-x, Q_i-x) , $3 \leq i \leq m$. 증명되지 않은 나머지 경우에 대해서는 다음과 같이 설계한다. $v=v_0^0$ 이라고 하자. $G(2^m, 4) \times P_2$ 의 대칭성에 의해서 $m=3$ 이고 $w=v_1^1, v_4^1$ 인 경우와 $m=4$ 이고 $w=v_1^1, v_4^1, v_6^1, v_7^1$ 인 경우를 고려하면 충분하다. 남은 경우 설계한 $DPC(m+1)$ 이 아래 표 4에 있다. \square

표 4 $G(2^m, 4) \times P_2$ 의 $DPC(m+1)$

$m=3,$ $w=v_1^1$	$(v_0^0, v_1^1, v_1^1), (v_0^0, v_0^0, v_1^1), (v_0^0, v_4^1, v_4^1, v_3^1, v_7^1, v_6^1, v_2^1, v_1^1), (v_0^0, v_7^1, v_3^1, v_2^1, v_6^1, v_5^1, v_5^1, v_1^1)$
$m=3,$ $w=v_4^1$	$(v_0^0, v_4^1, v_4^1), (v_0^0, v_0^0, v_4^1), (v_0^0, v_1^1, v_1^1, v_2^1, v_2^1, v_3^1, v_3^1, v_4^1), (v_0^0, v_7^1, v_7^1, v_6^1, v_6^1, v_5^1, v_5^1, v_4^1)$
$m=4,$ $w=v_1^1$	$(v_0^0, v_1^1, v_1^1), (v_0^0, v_4^1, v_4^1, v_5^1, v_1^1), (v_0^0, v_{12}^0, v_8^0, v_7^0, v_{11}^0, v_{10}^0, v_{10}^0, v_{14}^1, v_2^1, v_1^1),$ $(v_0^0, v_0^0, v_1^1) (v_0^0, v_{15}^0, v_3^0, v_2^0, v_{14}^0, v_{13}^0, v_9^0, v_5^0, v_6^0, v_6^0, v_7^1, v_3^1, v_{15}^1, v_{11}^1, v_{12}^1, v_8^1, v_9^1, v_{13}^1, v_1^1)$
$m=4,$ $w=v_4^1$	$(v_0^0, v_4^1, v_4^1), (v_0^0, v_{12}^0, v_{12}^0, v_8^0, v_4^1), (v_0^0, v_{15}^0, v_3^0, v_2^0, v_{14}^0, v_{13}^0, v_{13}^0, v_1^1, v_5^1, v_4^1),$ $(v_0^0, v_0^0, v_4^1), (v_0^0, v_1^1, v_5^1, v_6^1, v_{10}^0, v_{11}^0, v_7^0, v_8^0, v_9^0, v_9^0, v_{10}^0, v_6^1, v_2^1, v_{14}^1, v_{15}^1, v_{11}^1, v_7^1, v_3^1, v_4^1)$
$m=4,$ $w=v_6^1$	$(v_0^0, v_4^1, v_4^1, v_3^1, v_2^1, v_6^1), (v_0^0, v_1^1, v_{13}^0, v_9^0, v_5^0, v_6^0, v_6^0), (v_0^0, v_{12}^0, v_8^0, v_7^0, v_{11}^0, v_{10}^0, v_{10}^0, v_6^1),$ $(v_0^0, v_0^0, v_{12}^1, v_8^1, v_9^1, v_{13}^1, v_1^1, v_5^1, v_6^1), (v_0^0, v_{15}^0, v_3^0, v_2^0, v_{14}^0, v_{14}^0, v_{15}^0, v_{11}^0, v_7^1, v_6^1)$
$m=4,$ $w=v_7^1$	$(v_0^0, v_0^0, v_{12}^1, v_8^1, v_7^1), (v_0^0, v_{15}^0, v_{15}^0, v_3^0, v_7^1), (v_0^0, v_{12}^0, v_8^0, v_9^0, v_5^0, v_6^0, v_2^0, v_3^0, v_7^1),$ $(v_0^0, v_1^1, v_{13}^0, v_{14}^0, v_{10}^0, v_{11}^0, v_{11}^0, v_7^1), (v_0^0, v_4^1, v_4^1, v_5^1, v_1^1, v_{13}^1, v_9^1, v_{10}^1, v_{14}^1, v_2^1, v_6^1, v_7^1)$

G_0 에서 $v_{s_1}^0$ 부터 $v_{s_t}^0$ 까지 경로 $P = (v_{s_1}^0, v_{s_2}^0, \dots, v_{s_t}^0)$ 가 있을 때, G_i 상에서 같은 인덱스를 가진 정점으로 이루어진 경로 $(v_{s_1}^i, v_{s_2}^i, \dots, v_{s_t}^i)$ 를 G_i 에 있는 P 의 사촌 경로라고 말한다. 정점 w_{s_1} 부터 w_{s_t} 까지 경로 $P = (w_{s_1}, w_{s_2}, \dots, w_{s_t})$ 가 있을 때, w_{s_t} 부터 w_{s_1} 까지 경로 $(w_{s_t}, w_{s_{t-1}}, \dots, w_{s_1})$ 를 \bar{P} 로 나타내기로 한다.

보조정리 3 $m=3,4$ 일 때, $G(2^m, 4) \times P_3$ 은 임의의 G_0 에 있는 정점 v 와 G_2 에 있는 임의의 정점 w 간에 $DPC(k)$, $1 \leq k \leq m+1$ 을 가진다. 더구나 $3 \leq k < m+1$ 인 경우는 $DPC(k)$ 의 어떤 경로도 v 나 w 와 인접한 세로 에지를 지나지 않는다.

증명 v 에 인접한 G_1 의 정점을 v' , v' 에 인접한 G_2 의 정점을 v'' 이라고 하고, w 에 인접한 G_1 의 정점을 w' , w' 에 인접한 G_0 의 정점을 w'' 이라고 한다. 먼저 $v'' \neq w''$ 인 경우를 고려한다. G_0 에서 v'' 에서 w'' 까지 $DPC(k-1)$ 을 찾고, 그 경로를 P_1, P_2, \dots, P_{k-1} 이라고 하자. 이들 경로 중 길이가 1인 경로가 존재하면 그것을 P_1 , 그렇지 않으면 길이가 홀수인 임의의 경로를 P_1 이라고 둔다. P_1 은 보조정리 1에 의해서 존재한다. $P_1 = (v, v_{s_1}^0, v_{s_2}^0, \dots, v_{s_t}^0, w')$ 이라고 두고 P_1 을 이용하여 다음과 같이 v 와 w 사이에 서로소인 두 경로를 설계할 수 있다: (P_1, w', w) , $(v, v', v'', v_{s_1}^1, v_{s_1}^1, v_{s_2}^1, v_{s_2}^1, \dots, v_{s_t}^1, v_{s_t}^1, w)$. 이 때 t 가 짝수임에 유의한다. 나머지 $k-2$ 개의 경로를 설계하기로 한다. $2 \leq i \leq k-1$ 에 대해서 각각 G_1 와 G_2 에 있는 P_i 의 사촌경로들을 P_i^1, P_i^2 이라고 하고 이들을 이용하여 경로를 설계한다: $(P_i - \{w'\}, \bar{P}_i - \{w', v'\}, P_i^1 - \{v''\})$. 이들은 앞서 설계한 두 경로와 함께 v 와 w 사이의 $DPC(k)$ 가 된다. 이제 $v'' = w''$ 인 경우를 고려한다. $k=m-1, m$ 이면 앞의 보조정리 2에서와 같은 방식으로 쉽게 설계할 수 있다. 그리고 $k=m+1$ 일 때는 일반성을 잃지 않고 $v=v_0^0, w=w_0^2$ 라고 두고, 아래 표 5와 같이 설계하면 된다. \square

표 5 $G(2^m, 4) \times P_3$ 의 $DPC(m+1)$, $w=w_0^2$

$m=3$	$(v_0^0, v_1^0, v_2^0), (v_0^0, v_4^0, v_4^1, v_4^2, v_0^2), (v_0^0, v_7^0, v_7^1, v_6^0, v_6^1, v_5^0, v_5^1, v_5^2, v_6^2, v_7^2, v_0^2),$ $(v_0^0, v_1^0, v_1^1, v_2^0, v_2^1, v_3^0, v_3^1, v_3^2, v_2^2, v_1^2, v_0^2)$
$m=4$	$(v_0^0, v_1^0, v_2^0), (v_0^0, v_{12}^0, v_8^0, v_8^1, v_8^2, v_7^0, v_3^0, v_2^0, v_6^0, v_{10}^0, v_{14}^0, v_{13}^0, v_9^0, v_5^0, v_1^0, v_0^2),$ $(v_0^0, v_4^0, v_4^1, v_4^2, v_0^2), (v_0^0, v_{15}^0, v_{11}^0, v_7^0, v_3^0, v_2^0, v_2^1, v_1^0, v_5^0, v_9^0, v_{13}^0, v_{12}^0, v_{12}^1, v_0^2),$ $(v_0^0, v_1^0, v_5^0, v_9^0, v_{13}^0, v_{14}^0, v_{10}^0, v_6^0, v_6^1, v_{10}^1, v_{14}^1, v_{15}^1, v_3^1, v_7^1, v_{11}^1, v_{11}^2, v_{15}^2, v_0^2)$

보조정리 4 $m=3,4$ 일 때, $G(2^m, 4) \times P_b$, $b \geq 2$ 는 임의의 G_0 에 있는 정점 v 와 G_{t-1} 에 있는 임의의 정점 w 간에 $DPC(k)$, $1 \leq k \leq m+1$ 을 가진다. 더구나 $3 \leq k < m+1$ 인 경우는

$DPC(k)$ 의 어떤 경로도 v 나 w 와 인접한 세로 에지를 지나지 않는다.

증명 l 에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다. $l=2,3$ 인 경우는 앞서 보조정리 2, 3에서 증명하였다. $l \geq 4$ 라고 가정한다. G_0 와 G_1 의 정점으로 유도된 그래프를 H_0 , 나머지 정점들로 유도된 그래프를 H_1 이라고 하자. H_0 에는 H_1 에 있는 어떤 정점과 인접한 정점이 존재하는데, 그것을 x 라고 하고 그와 인접한 H_1 의 정점을 x' 이라고 하자. $k=1,2$ 인 경우는 당연히 성립하므로 $k=m-1, m$ 그리고 $k=m+1$ 인 경우를 고려하면 충분하다. H_0 에서 v 부터 x 까지 $DPC(k)$ 를 찾는다. 그것들을 P_1, P_2, \dots, P_k 라고 하고 x 에 도달하기 직전에 지나는 정점들을 p_1, p_2, \dots, p_k 라고 하자. H_1 에서 x' 부터 w 까지 $DPC(k)$ 를 찾고 이들 경로를 Q_1, Q_2, \dots, Q_k 라고 하고 x' 바로 다음에 지나는 정점들을 q_1, q_2, \dots, q_k 라고 하자. $k=m-1$ 인 경우는 p_i 들과 q_j 들 간에 서로 인접한 쌍이 최소한 $m-2$ 개 존재함을 관찰할 수 있다. $k < m+1$ 인 경우는 $DPC(k)$ 의 어떤 경로도 출발 정점이나 도착 정점과 인접한 세로 에지를 지나지 않기 때문이다. 일반성을 잃지 않고 모든 $i (1 \leq i \leq m-2)$ 에 대해서 p_i 와 q_i 가 인접하다고 하자. 그러면 $DPC(k)$ 는 다음과 같다: $(P_{m-1}, Q_{m-1}), (P_i - x, Q_i - x'), 1 \leq i \leq m-2$. $k=m, m+1$ 인 경우는 일반성을 잃지 않고 모든 $i (1 \leq i \leq m)$ 에 대해서 p_i 와 q_i 가 인접하다고 하자. $k=m$ 인 경우는 (P_m, Q_m) 과 $(P_i - x, Q_i - x'), 1 \leq i \leq m-1$ 가 $DPC(k)$ 이다. 그리고 $k=m+1$ 인 경우는 세로 에지로 x 에 도달하는 경로를 P_{m+1} , x' 을 지나 세로 에지를 지나는 경로를 Q_{m+1} 이라고 할 때, $DPC(k)$ 는 $(P_{m+1}, Q_{m+1}), (P_i - x, Q_i - x'), 1 \leq i \leq m$ 이 $DPC(k)$ 를 이룬다. \square

정리 1 $G(2^m, 4) \times P_j$, $m \geq 3$, $l \geq 2$ 는 임의의 G_0 에 있는 정점 v 와 G_{l-1} 에 있는 정점 w 간에 $DPC(k)$, $1 \leq k \leq m+1$ 을 가진다.

증명 m 에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다. $m=3,4$ 일 때는 앞의 보조정리 4에서 증명하였다. $m \geq 5$ 라고 가정한다. $k=1,2$ 일 때는 성립하므로 $k \geq 3$ 이라고 가정한다. $G(2^m, 4)$ 의 재귀적 구조를 가지므로 G_j 는 $G(2^{m-2}, 4)$ 와 동형인 4개의 그래프 $G_{i,0}, G_{i,1}, G_{i,2}, G_{i,3}$ 로 구성되어 있다. 일반성을 잃지 않고 v 는 $G_{0,0}$ 에 속하고 w 는 $G_{l-1,j}$ 에 속한다고 하자. 이 때 $j=0,1,2$ 이다. $G_{0,0}, G_{0,1}, \dots, G_{0,j}, G_{1,j}, G_{2,j}, \dots, G_{l-1,j}$ 와 그들 사이의 에지를 포함하는 부그래프가 $G(2^{m-2}, 4) \times P_{l+j}$ 와 동형이게 된다. 이 그래프는 귀납적 가설에 의해서 v 와 w 간에 $DPC(k-2)$ 를 가진다. 나머지 두 경로는 $G(2^{m-2}, 4)$ 가 해밀톤 연결되어 있다는 성질을 이용하여 구한다. 즉, $j=0$ 이면 v 에 인접한 $G_{0,1}$ 의 정점 v' 에서 w 에 인접한 $G_{l-1,1}$ 의 정점 w' 까지 $G_{0,1}, G_{1,1}, \dots, G_{l-1,1}$ 의 정점을 모두 지나는 경로 P_1 과, 나머지 정점을 모두 지나도록 마찬가지로 경로 P_2 를 설계할 수 있다. $j \neq 0$ 이면 $G_{1,0}, G_{2,0}, \dots, G_{l-1,0}$, 그리고 $G_{1,j-1}, G_{2,j-1}, \dots, G_{l-1,j-1}$ 의 정점을 모두 지나는 경

로와 나머지 정점들을 지나는 경로를 마찬가지로 설계할 수 있다. 이 때 예외적인 경우 하나가 발생할 수 있는데, 그것은 v 에 인접한 정점 x 가 w 에도 인접하는 경우이다. $l=2$ 이고 $j=1$ 일 때 발생할 수 있다. x 를 제외한 $G_{1,0}$ 의 다른 정점들이 $DPC(k)$ 의 한 경로에 포함되도록 다음과 같이 조치한다. 우선 $m-2 \geq 4$ 인 경우는 $G_{1,0}$ 가 1-고장 해밀톤 연결된 그래프가 되므로 $G_{1,1}$ 에 있는 $DPC(k)$ 의 어떤 경로 P_i 가 지나가는 에지 (a, b) 를 찾는다. 각각 a, b 와 인접한 $G_{1,0}$ 의 정점을 a', b' 이라고 하자. $G_{1,0}$ 이 1-고장 해밀톤 연결된 그래프이므로 x 를 제외한 다른 모든 정점을 지나면서 a' 과 b' 을 잇는 경로 Q 가 존재한다. P_i 에서 에지 (a, b) 를 제거한 다음 $(a, a'), (b', b)$, 그리고 Q 를 추가하여 확장한다. $m-2=3$ 이면 $G_{1,0}$ 가 1-고장 해밀톤 그래프임을 이용한다. x 를 제외한 나머지 정점을 모두 지나는 사이클 C 를 찾는다. 이제는 $G_{1,1}$ 에 있는 어떤 경로 P_j 가 지나가는 에지 (a, b) 중 C 가 (a', b') 을 지나가는 에지를 찾아서 위와 같은 방식으로 P_j 를 확장하면 된다. 이제 그런 에지 (a, b) 가 존재함을 보이면 증명이 완성된다. $G(2^3, 4) \times P_3$ 에서 $k \geq 3$ 인 경우 $DPC(k)$ 를 설계할 때, $DPC(k)$ 에 있는 경로들이 지나가는 에지는 $G_{1,1}$ 에서 스패닝 트리를 이루도록 설계하였다. $k=1, 2$ 인 경우도 $G(2^3, 4)$ 가 해밀톤 연결되어 있음을 이용하여 마찬가지로 조건을 만족하도록 설계할 수 있다. 그러면 $G_{1,1}$ 의 스패닝 트리에 속한 7개의 에지와 C 의 에지 7개가 있고 $G(2^3, 4)$ 에는 총 12개의 에지가 있으므로 우리가 원하는 에지 (a, b) 를 항상 찾을 수 있다. \square

3.3 $G(2^m, 4)$ 의 경로 커버

이제 앞의 보조정리 1과 정리 1을 이용하여 $G(2^m, 4)$ 가 일대일 서로소인 경로 커버를 가짐을 보인다.

정리 2 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 는 임의의 두 정점 v, w 사이에 $DPC(k)$, $1 \leq k \leq m$ 을 가진다.

증명 m 에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다. $m=3, 4$ 일 경우는 앞서 보조정리 1에서 증명하였다. $m \geq 5$ 인 경우를 고려한다. 또한 $k=1, 2$ 인 경우는 성립하므로, $k \geq 3$ 이라고 가정한다. $G(2^m, 4)$ 의 재귀적 구조에서 $G(2^{m-2}, 4)$ 와 동형인 4개의 그래프를 G_0, G_1, G_2, G_3 라고 하자. G_i 는 해밀톤 연결된 그래프이다. v 는 G_0 에 속한다고 하자. 먼저 w 도 G_0 에 속하는 경우는 G_0 에서 v, w 사이에 $DPC(k-2)$ 를 구한다. 나머지 두 경로를 설계하기로 한다. 각각 v, w 에 인접한 G_1 의 정점을 v', w' 이라고 하고, v' 와 w' 사이의 G_1 의 해밀톤 경로를 Q_1 이라고 할 때 경로 $P_1 = (v, Q_1, w)$ 라고 둔다. 나머지 한 경로 P_2 는 마찬가지로 G_2 와 G_3 의 정점을 모두 지나도록 설계할 수 있다. 이제 w 는 G_j 의 정점이라고 하자. 일반성을 잃지 않고 $j=1, 2$ 이며 $j=2$ 인 경우 v 에 인접한 G_3 의 정점이 w 와 인접하지 않다고 가정한다. G_0, G_1, \dots, G_j 와 이들 사이의 에지로 이루어진 부그래프

는 $G(2^{m-2}, 4) \times P_{j+1}$ 과 동형이고 정리 1에 의해서 v, w 사이에 $DPC(k-1)$ 이 존재한다. 나머지 한 경로는 위에서와 마찬가지로 G_{j+1}, \dots, G_3 에 있는 모든 정점을 지나는 경로를 찾으면 된다. \square

4 결론

이 논문에서는 서로소인 경로 커버라는 문제를 제안하고 출발 정점과 도착 정점이 하나인 일대일 서로소인 경로 커버를 고려하였다. 모든 k 에 대해서 임의의 두 정점 사이에 일대일 $DPC(k)$ 를 가진 그래프는 해밀톤 연결되었다는 것보다 강한 해밀톤 성질을 가지는 것이며, 통신망의 서로소인 경로 커버는 라우팅에 응용될 수 있을 것으로 기대된다. 채귀원형군 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$ 는 임의의 두 정점 v, w 사이에 모든 $k (1 \leq k \leq m)$ 에 대해서 $DPC(k)$ 를 가짐을 보였다. 증명에서 제시된 방법을 따르면 $DPC(k)$ 를 찾는 효율적인 알고리즘을 설계할 수 있다. 채귀원형군이 일대다, 다대다 서로소인 경로 커버를 가지는가 하는 것은 향후 연구 과제이다.

참고문헌

- [1] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, 5th printing, American Elsevier Publishing Co., Inc., 1976.
- [2] Y. Ishigami, "The wide-diameter of the n -dimensional toroidal mesh," *Networks*, vol. 27, pp. 257-266, 1996.
- [3] D.-R. Duh and G.-H. Chen, "On the Rabin number problem," *Networks*, vol. 30(3), pp. 219-230, 1997.
- [4] F. Harary and M. Lewinter, "The starlike trees which span a hypercube," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 15(4), pp. 299-302, 1988.
- [5] H. Enomoto and K. Ota, "Partitions of a graph into paths with prescribed endvertices and lengths," *Journal of Graph Theory*, vol. 34(2), pp. 163-169, June 2000.
- [6] J.-H. Park and K.-Y. Chwa, "Recursive circulants and their embeddings among hypercubes," *Theoretical Computer Science*, vol. 244, pp. 35-62, Aug. 2000.
- [7] C. Kim, J. Choi, and H.-S. Lim, "Embedding Full Ternary Trees into Recursive Circulants," *Lecture Notes in Computer Science #2510*, pp 874-882, 2001.
- [8] H.-S. Lim, J.-H. Park, and K.-Y. Chwa, "Embedding trees into recursive circulants," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 69, pp. 83-99, 1996.
- [9] D.K. Biss, "Hamiltonian decomposition of recursive circulant graphs," *Discrete Mathematics*, vol. 214, pp. 89-99, Mar. 2000.
- [10] C. Micheneau, "Disjoint Hamiltonian cycles in recursive circulant graphs," *Information Processing Letters*, vol. 61, pp. 259-264, Mar. 1997.

- [11] J.-H. Park, "Hamiltonian decomposition of recursive circulants," *International Symposium on Algorithms and Computation ISAAC'98 (LNCS #1533)*, Taejon, Korea, pp. 297-306, Dec. 1998.
- [12] T. Araki and Y. Shiba, "Pancyclicity of recursive circulant graphs," *Information Processing Letters*, vol. 81, pp. 187-190, Feb. 2002.
- [13] Y.-C. Chen, J.J.M. Tan, L.-H. Hsu, and S.-S. Kao, "Super-connectivity and super-edge-connectivity for some interconnection networks," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 140, pp. 245-254, Aug. 2003.
- [14] G. Fertin and A. Raspaud, "Recognizing Recursive Circulant Graphs $G(cd^m, d)$," preprint, 2002.
- [15] M.E. Muzychuk and G. Tinhofer, "Recognizing circulant graphs in polynomial time: An application of association schemes," *The Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 8, #R26, 2001.
- [16] C.-H. Tsai, J.M. Tan, Y.-C. Chuang, and L.-H. Hsu, "Fault-free cycles and links in faulty recursive circulant graphs," in *Proc. of Workshop on Algorithms and Theory of Computation ICS2000*, pp. 74-77, 2000.