재귀원형군의 강한 해밀톤 성질*

박 정흠

[1]가톨릭대학교 컴퓨터·전자공학부
420-743 경기도 부천시 원미구 역곡 2동 산 43-1
jhpark@tcs.cuk.ac.kr
전화 (032) 340-3366, 팩스 (032) 340-3777

Strong Hamiltonicity of Recursive Circulants

Jung-Heum Park

[1]School of Computer Science and Electronic Engineering
The Catholic University of Korea
Yokkok 2-dong 43-1, Wonmi-gu, Puchon City, Kyonggi-do 420-743
jhpark@tcs.cuk.ac.kr
TEL (032) 340-3366, FAX (032) 340-3777

* 본 연구는 2000학년도 가톨릭대학교 교비연구비로 수행되었음.

재귀원형군의 강한 해밀톤 성질*

Strong Hamiltonicity of Recursive Circulants

요약

이 논문은 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 강한 해밀톤 성질을 그래프 이론적 관점에서 고찰한다. 재귀원형군은 [9]에서 제안된 다중 컴퓨터의 연결망 구조이다. $G(2^m, 2^k)$가 임의의 정점 쌍 v, w를 잇는 길이 l인 경로를 가지는가 하는 문제를 고려하여, (a) $G(2^m, 2)$는 $l \geq d(v, w)$을 만족하는 모든 l에 대해서 길이 l인 경로를 가지며, (b) $G(2^m, 4)$는 $l \geq d(v, w)+2$인 모든 길이의 경로를 가지며, (c) $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 3$은 길이 $d(v, w)+2^k-3$인 경로를 가지지 않는 정점 쌍이 있음을 보인다. 여기서, $d(v, w)$는 v와 w 사이의 거리이다.

Abstract

In this paper, we investigate strong hamiltonian properties of recursive circulant $G(2^m, 2^k)$ from the graph theory point of view. Recursive circulant is an interconnection structure for multicomputer networks proposed in [9]. We consider the problem whether $G(2^m, 2^k)$ has a path of length l joining a pair of vertices v and w, and show that (a) $G(2^m, 2)$ has a path of length l for any $l \geq d(v, w)$, (b) $G(2^m, 4)$ has a path of length l for any $l \geq d(v, w)+2$, (c) for some pair of vertices in $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 3$, there is no path of length $d(v, w)+2^k-3$, where $d(v, w)$ is the distance from v to w.

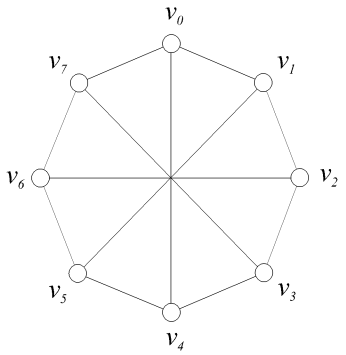
---

* 본 연구는 2000학년도 가톨릭대학교 교비연구비로 수행되었음.

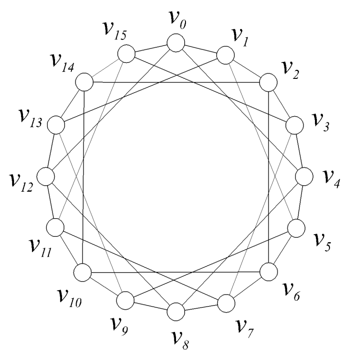
1 서론

고성능 컴퓨터를 설계하기 위해서 다중 컴퓨터 네트워크(multicomputer network)를 구성하는 것은 비용이 적게 드는 방식이다[11]. 다중 컴퓨터 네트워크는 개별 기억장치를 가지는 노드(node)와 노드를 서로 이어주는 통신 링크(communication link)로 이루어져 있다. 다중 컴퓨터 네트워크에서 연결망 구조(interconnection structure)는 전체 시스템의 성능에 크게 영향을 미치는 것으로 알려져 있다. 연결망 구조는 그래프(graph)로 자연스럽게 모델할 수 있는데, 이 때 노드는 그래프의 정점(vertex)에 대응되고 통신 링크는 에지(edge)에 대응된다.

재귀원형군(recursive circulant)은 [9]에서 제안된 다중컴퓨터의 연결망 구조이다. *재귀원형군* $G(N,d)$는 N개의 노드 $\{v_0, v_1, \cdots, v_{N-1}\}$을 가지고 $s+d^i \equiv t \pmod N$을 만족하는 정수 $i, 0 \le i \le \lceil \log_d N \rceil - 1$가 존재하면 두 노드 v_s, v_t를 잇는 에지가 있다. 이 논문에서는 N과 d가 2의 거듭제곱으로 제한된 재귀원형군, 즉 $N=2^m$, $d=2^k$인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$를 고려한다. 재귀원형군의 예가 아래 그림 1에 있다.



(a) $G(2^3, 4)$



(b) $G(2^4, 4)$

그림 1. 재귀원형군의 예

해밀톤 문제(hamiltonian problem)는 그래프 이론 분야에서 널리 알려진 문제 중의 하나이다. 이 문제는 관련된 응용 분야도 많고 또 그래프의 경로나 사이클에 관한 문제가 결국은 해밀톤 문제로 귀착되는 경우가 많다[6]. 선형 배열(linear array)이나 링(ring)을 연결망 구조에 임베딩(embedding)하는 문제는 연결망 구조를 나타내는 그래프의 해밀톤 문제로 정형화할 수 있다. 그래프의 *해밀톤 사이클(hamiltonian cycle)*은 그 그래프의 스패닝 사이클(spanning cycle), 즉 모든 정점을 포함하는 사이클을 말한다. 해밀톤 사이클을 가진 그래프를 해밀톤 그래프라고 하고 모든 정점을 지나는 경로는 *해밀톤 경로(hamiltonian path)*라고 한다.

재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$는 해밀톤 경로를 가지고 있다. 그 경로는 $v_0 - v_1 - \cdots - v_{2^m-1}$이

다. 해밀톤 경로에 노드 v_0과 v_{2^m-1}을 잇는 에지를 첨가하여 해밀톤 사이클을 쉽게 구성할 수 있다. 이 때 노드 수 2^m은 물론 3 이상인 경우이다. 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$이 해밀톤 사이클을 가지고 있으므로, 이 논문에서는 $G(2^m, 2^k)$가 해밀톤 그래프라는 것보다 어떤 강한 성질을 가지는지에 관심이 있다.

임의의 노드 쌍 v, w에 대해서 v와 w를 연결하는 해밀톤 경로를 가진 그래프를 *해밀톤 연결된(hamiltonian-connected)* 그래프라고 한다. 해밀톤 연결된 그래프는 해밀톤 사이클을 가진다. 왜냐하면 해밀톤 연결되어 있는 그래프의 한 에지의 양 끝 정점을 잇는 해밀톤 경로와 그 에지는 해밀톤 사이클을 이룬다. 재귀원형군 $G(N, d)$는 분지수(degree)가 3 이상인 경우에 해밀톤 연결되어 있거나, 혹은 이분(bipartite) 그래프이면서 bihamiltonian-connected되어 있음이 알려져 있다[10]. 따라서 $G(2^m, 2^k)$는 $m \geq k+1$인 경우 분지수가 3 이상이고 이분 그래프가 아니므로 해밀톤 연결된 그래프이다. 재귀원형군을 포함하는 abelian 군에 대한 Cayley 그래프 부류에서 해밀톤 연결된 그래프는 [4]에서 고려되었다.

그래프 G의 해밀톤 분할(hamiltonian decomposition)은 G의 분지수가 $2d$이면 d개의 에지가 서로 다른 해밀톤 사이클로 분할하고 분지수가 $2d+1$이면 d개의 해밀톤 사이클과 1-팩터(factor)로 분할하는 것이다. 재귀원형군 $G(cd^m, d)$는 에지가 서로소인 해밀톤 사이클로 분할하는 해밀톤 분할이 가능함이 알려져 있다[5,7,8]. 따라서 $G(2^m, 2^k)$는 해밀톤 분할이 가능하다.

해밀톤 그래프보다 강력한 또 다른 성질로 pancyclic 그래프가 있다. 모든 k에 대해서, $3 \leq k \leq n$, 길이 k인 사이클을 가진 그래프를 *pancyclic 그래프*라고 한다. 길이 3인 사이클을 제외하고 모든 길이의 사이클을 가지면 *almost pancyclic 그래프*라고 한다. 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$에서 주어진 l에 대해서, 길이 l인 사이클이 존재할 필요충분조건이 알려져 있다[1]. 이 조건에 따르면 $G(2^m, 2)$는 pancyclic 그래프, $G(2^m, 4)$는 almost pancyclic 그래프, 그리고 $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 3$은 길이 2^k 이상인 모든 사이클을 가짐을 알 수 있다.

임의의 노드 쌍 v, w와 $d(v, w) \leq k \leq n-1$을 만족하는 모든 k에 대해서 v와 w를 잇는 길이 k인 경로가 존재하는 그래프를 *panconnected 그래프*라고 한다. 길이 $d(v, w)+1$인 경로를 제외하고 $d(v, w)+2$ 이상인 모든 경로를 가진 그래프를 *almost panconnected 그래프*라고 한다. panconnected 그래프는 pancyclic 그래프가 되고, almost panconnected 그래프는 almost pancyclic 그래프가 된다.

이 논문에서는 $G(2^m, 2)$가 panconnected 그래프이고, $G(2^m, 4)$는 almost panconnected 그래프임을 보인다. $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 3$은 길이 $d(v, w)+2^k-3$인 경로가 존재하지 않는 정점 쌍 v, w가 존재함을 보인다.

그래프 G에서 정점 v와 w를 잇는 경로를 $v-w$ 경로라고 말한다. 경로의 길이는 경로에 포함된 에지의 수이다. 두 정점 v와 w 사이의 거리는 최단 $v-w$ 경로의 길이를 말하고 $d(v,w)$로 표기하기로 한다. 양끝 정점이 같아서 닫힌 경로를 사이클이라고 하고, 사이클의 길이도 에지의 수로 정의한다. 여기서 정의하지 않은 그래프 이론적인 용어는 [3]를 따른다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서 재귀원형군에 대한 기본적인 성질을 살펴본 다음, 3절에서는 $G(2^m, 2^k)$의 panconnected 성질을 고찰한다. 마지막으로 4절에서 결론을 맺기로 한다.

2 재귀원형군

재귀원형군의 기본적인 성질은 [1,2,10]에 잘 나타나 있다. 이 절에서는 논문의 전개에 필요한 성질을 간략히 소개하기로 한다. 우선 재귀원형군 $G(N,d)$는 노드 대칭적인 성질을 가진다. 즉 임의의 노드 v_i를 v_j에 대응시키는 automorphism이 존재한다.

재귀원형군 $G(N,d)$는 $N=cd^m$, $1 \le c < d$일 때 재귀적 구조(recursive structure)를 갖는다. 다시 말하면, $G(cd^m, d)$는 아래 성질을 이용하여 재귀적으로 정의할 수 있다.

성질 1 V_i를 다음과 같이 정의되는 $G(cd^m, d)$, $m \ge 1$의 정점 부분집합이라고 하자: $V_i = \{v_j \mid j \equiv i \pmod{d}\}$. 모든 $0 \le i < d$에 대해서 V_i로 유도된 $G(cd^m, d)$의 부그래프는 $G(cd^{m-1}, d)$와 동형(isomorphic)이다.

$G(cd^m, d)$, $m \ge 1$은 다음과 같이 d개의 $G(cd^{m-1}, d)$를 이용하여 설계할 수 있다. $G_i(V_i, E_i)$, $0 \le i < d$를 $G(cd^{m-1}, d)$와 동형인 그래프라고 하고 $V_i = \{v_0^i,\ v_1^i,\ \cdots,\ v_{cd^{m-1}-1}^i\}$라 두자. 그리고 G_i는 v_j^i을 v_j에 대응시키는 사상에 의해서 $G(cd^{m-1}, d)$와 동형이라고 하자. v_j^i를 v_{jd+i}로 다시 레이블한 다음, 정점 집합을 $\bigcup_{0 \le i < d} V_i$이라고 두고, 에지 집합을 $\bigcup_{0 \le i < d} E_i \cup X$이라고 두면 $G(cd^m, d)$가 정의된다. 여기서 X는 크기가 1인 에지의 집합으로 $\{(v_j, v_{j'}) \mid j+1 \equiv j' \pmod{cd^m}\}$이다. 4개의 $G(8,4)$로 $G(32,4)$을 설계한 예가 그림 2에 있다.

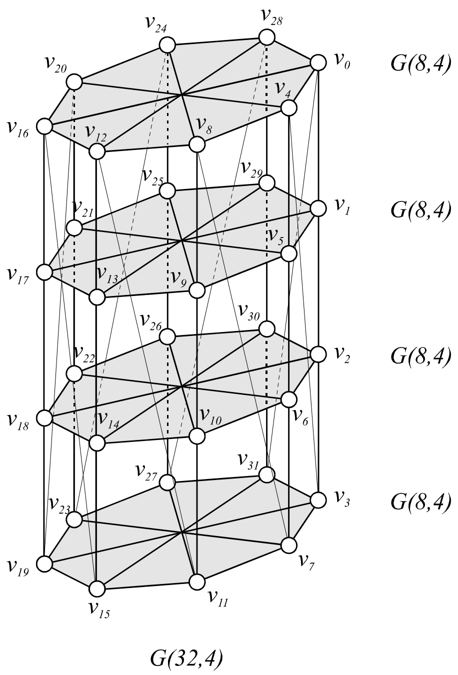


그림 2　$G(32,4)$의 재귀적 구조

$G(2^m, 2^k)$는 $G(cd^m, d)$ 부류에 속하므로 재귀적 구조를 갖는다. $G(2^m, 2^k)$의 재귀적 구조에서는 $G(2^{m-k}, 2^k)$와 동형인 G_0, $G_1, \cdots$, G_{2^k-1}에 크기가 1인 에지가 2^m개 추가되어 있다. $G(2^m, 2^k)$의 정점이 어떤 G_i에 속해 있는지를 나타내고자 할 때는 v_j^i, $0 \le i < 2^k$, $0 \le j < 2^{m-k}$와 같이 표기한다.

$G(2^m, 2^k)$의 최단 경로 성질은 재귀적 구조에서 잘 이해할 수 있다. 아래 성질은 $G(2^m, 2^k)$를 포함하는 부류인 $G(cd^m, d)$에서도 성립한다.

성질 2 (a) 두 정점 v_0^0와 v_j^0 사이의 모든 최단 경로는 G_0에 속한 정점만을 지난다. 따라서 $G(2^m, 2^k)$상에서 v_0^0와 v_j^0 사이의 거리 $d(v_0^0, v_j^0)$는 G_0상에서 두 정점간의 거리와 같다.
(b) v_0^0와 v_j^i 사이에는 $i < 2^{k-1}$이면 v_j^0를, $i > 2^{k-1}$이면 v_{j+1}^0을 지나는 최단 경로가 존재한다. $j = 2^{k-1}$일 경우에는 v_j^0나 혹은 v_{j+1}^0을 지나는 최단 경로가 존재한다. 이 경우 $d(v_0^0, v_j^0)$가 $d(v_0^0, v_{j+1}^0)$보다 작으면 v_j^0를, 크면 v_{j+1}^0을 지나는 최단 경로가 존재하고, 같은 경우는 각각을 지나는 최단 경로가 존재한다.

$G(2^m, 2^k)$의 지름(diameter) $\mathrm{dia}_{m,k}$에 대해서 다음이 성립한다. $G(2^m, 2)$의 지름은 $\lceil m/2 \rceil$이고, $G(2^m, 4)$의 지름은 $\lceil (3m-1)/4 \rceil$이다.

성질 3

$$\mathrm{dia}_{m,k} = \begin{cases} \lceil \frac{2^k-1}{2} \lfloor \frac{m}{k} \rfloor \rceil & k\text{가 } m\text{을 나눌 때;} \\ \lfloor \frac{2^k-1}{2} \lfloor \frac{m}{k} \rfloor \rfloor + 2^{m \pmod{k} - 1} & \text{그렇지 않을때.} \end{cases}$$

3 재귀원형군의 panconnected 성질

이 절에서는 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 panconnected 성질을 고찰하기로 한다. 먼저 $G(2^m, 2)$는 panconnected 그래프임을 보이고 $G(2^m, 4)$는 almost panconnected 그래프임을 보인다. 그리고 $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 3$의 panconnected 성질을 살펴보기로 한다.

3.1 $G(2^m, 2)$

$G(2^m, 2)$가 panconnected 그래프임을 보이기로 한다. 즉, 임의의 정점쌍 v, w사이에 $d(v, w) \leq l \leq 2^m - 1$인 모든 l에 대해서 길이 l인 경로가 존재함을 보인다. 그래프의 경로를 에지의 집합으로 간주하여, 경로 P에 에지 e나 에지 집합 X를 추가하는 경우는 $P+e$, $P+X$라고 표기하고, P에서 에지나 에지 집합을 제거하는 경우는 $P-e$, $P-X$로 표기하기로 한다.

정리 1 $G(2^m, 2)$는 panconnected 그래프이다.

증명 $m \leq 2$인 경우는 $G(2^m, 2)$가 완전 그래프이므로 panconnected 그래프이다. 이제 $m \geq 3$인 경우를 $G(2^m, 2)$의 재귀적 구조를 이용하여 m에 대한 수학적 귀납법으로 증명하기로 한다. 임의의 두 정점 v, w 사이의 경로를 고려하는데, 일반성을 잃지 않고 v는 G_0에 속한다고 가정한다.

경우 1 w가 G_0에 속하는 경우

G_0가 panconnected이므로 G_0에서 v, w 사이에 길이 l_1, $d(v, w) \leq l_1 \leq 2^{m-1} - 1$인인 경로 P_1이 존재한다. 이제 v, w 사이에 길이 2^{m-1}이상인 경로가 존재함을 보이면 된다. 경로 P_1에 있는 인접한 두 정점을 v', w'이라고 하자. P_1은 v- v' 경로, 에지 (v', w'), w'- w 경로로 구성되어 있다. 이제 각각 v'과 w'에 인접하면서 G_1에 속한 정점을 각각 v'', w''이라고 하자. 이때 v''과 w''이 서로 인접한 정점이 되도록 선택한다. G_1 상에서

v''- w'' 경로를 P_2라고 한다. P_2의 길이 l_2는 $1 \le l_2 \le 2^{m-1}-1$이다. 경로 $P = P_1 - (v', w') + P_2 + (v', v'') + (w', w'')$의 길이 l은 $l_1 + l_2 + 1$이므로 $d(v, w) + 2 \le l \le 2^m - 1$이 된다. $d(v, w)$는 $G(2^{m-1}, 2)$의 지름 $\lceil (m-1)/2 \rceil$ 이하이므로, $d(v, w) + 2 \le 2^{m-1}$이다. 따라서 P는 $2^{m-1} \le l \le 2^{m-1}$을 만족하는 임의의 길이를 가질 수 있다.

경우 2 w가 G_1에 속하는 경우

먼저 v와 w가 인접한 경우를 생각한다. w에 인접하면서 v와 다른 G_0의 정점을 v'이라고 하자. 이때 v와 v'은 인접하게 된다. $(v, v') + (v', w)$은 길이 2인 경로가 된다. 이제 길이가 3 이상인 경로를 설계하면 된다. G_0상에서 v- v' 경로를 P_1이라고 하자. P_1의 길이 l_1은 $1 \le l_1 \le 2^{m-1}-1$이다. v'에 인접하면서 w와 다른 G_1의 정점을 w'이라고 하자. G_1상에서 w- w' 경로를 P_2라고 하면, P_2의 길이 l_2는 $1 \le l_2 \le 2^{m-1}-1$이다. w와 w'도 서로 인접함에 유의한다. 경로 $P = P_1 + P_2 + (v', w')$의 길이 l은 $3 \le l \le 2^m - 1$이다.

이제 v와 w가 인접하지 않은 경우를 고려한다. w에 인접한 G_0의 정점을 v'이라고 하자. 이때 v'은 v에서 w까지 최단 경로가 지나는 정점을 선택한다. 즉, $d(v, w) = d(v, v') + 1$이다. G_0상의 v- v' 경로를 P_1이라고 하면, P_1의 길이 l_1은 $d(v, v') \le l_1 \le 2^{m-1}-1$이다. v'에 인접하고 w와 다른 G_1의 정점을 w'이라고 하고, G_1상의 w- w' 경로를 P_2라고 하자. P_2의 길이 l_2는 $1 \le l_2 \le 2^{m-1}-1$이다. 경로 $P = P_1 + P_2 + (v', w')$의 길이 l은 $d(v, v') + 2 \le l \le 2^m - 1$이다. $d(v, w) = d(v, v') + 1$이므로 길이 $d(v, w) + 1$ 이상인 경로가 설계된 것이다. □

따름 정리 1 $G(2^m, 2)$는 pancyclic 그래프이다.

3.2 $G(2^m, 4)$

$G(2^m, 4)$, $m \ge 3$이 almost panconnected임을 보인다. 즉, 임의의 정점쌍 v, w사이에 길이 l, $d(v, w) + 2 \le l \le 2^m - 1$인 경로가 존재함을 보인다. 그런데, $G(2^m, 4)$, $m \ge 3$이 해밀톤 연결되어 있으므로, 길이 $2^m - 1$인 경로가 존재함을 이미 알고 있다. 먼저 $G(2^3, 4)$와 $G(2^4, 4)$가 almost panconnected임을 보이고, 이것을 이용하여 일반적인 경우로 확장한다.

보조 정리 1 $G(2^3, 4)$는 almost panconnected 그래프이다.

증명 정점 대칭이므로 $v=v_0$라고 둔다. 그리고 $w=v_j$, $1\le j\le 4$인 경우만 보이면 충분하다. 길이 l, $d(v,w)+2\le l\le 6$인 경로를 보이면 다음과 같다.

(i) $w=v_1$인 경우: $d(v,w)=1$

$l=3$: $v_0-v_4-v_5-v_1$

$l=4$: $v_0-v_4-v_3-v_2-v_1$

$l=5$: $v_0-v_4-v_5-v_6-v_2-v_1$

$l=6$: $v_0-v_4-v_3-v_7-v_6-v_2-v_1$

(ii) $w=v_2$인 경우: $d(v,w)=2$

$l=4$: $v_0-v_4-v_5-v_6-v_2$

$l=5$: $v_0-v_4-v_3-v_7-v_6-v_2$

$l=6$: $v_0-v_4-v_5-v_6-v_7-v_3-v_2$

(iii) $w=v_3$인 경우: $d(v,w)=2$

$l=4$: $v_0-v_1-v_5-v_4-v_3$

$l=5$: $v_0-v_1-v_5-v_6-v_2-v_3$

$l=6$: $v_0-v_1-v_2-v_6-v_5-v_4-v_3$

(iv) $w=v_4$인 경우: $d(v,w)=1$

$l=3$: $v_0-v_1-v_5-v_4$

$l=4$: $v_0-v_1-v_2-v_3-v_4$

$l=5$: $v_0-v_1-v_2-v_6-v_5-v_4$

$l=6$: $v_0-v_1-v_2-v_6-v_7-v_3-v_4$ □

이제 $G(2^4,4)$이 almost panconnected임을 보이기로 한다. n개의 정점 $\{v_{15-n+1}, v_{15-n+2}, \cdots, v_{15}\}$로 유도된 부그래프에서 v_{14}와 v_{15}를 잇는 길이 $n-1$인 해밀톤 경로를 $Q(n)$이라고 하자. [1]에 의하면 $n=5$ 경우와 $n\ge 7$인 경우 $Q(n)$이 존재한다.

보조 정리 2 $G(2^4,4)$는 almost panconnected 그래프이다.

증명 $v=v_0$라고 두고, $w=v_j$, $1\le j\le 8$이라고 둔다. $G(2^4,4)$에서 정점 $\{v_0, v_1, \cdots, v_7\}$로 유도된 부그래프는 $G(2^3,4)$에서 에지 (v_0, v_7)을 제거한 그래프와 같다. 따라서 보조 정리 1에서 설계한 경로는 모두 에지 (v_0, v_7)을 이용하지 않고 설계하였으므로, 설계한 경

로는 $G(2^4, 4)$의 경로이기도 하다.

(i) $w = v_1$인 경우: $d(v, w) = 1$

$l = 3, 4, 5, 6$: 보조 정리 1 참조

$l = 7$: $v_0 - Q(5) - v_2 - v_1$

$l = 8$: $v_0 - v_4 - v_8 - v_7 - v_3 - v_2 - v_6 - v_5 - v_1$

$9 \le l \le 14$: $v_0 - Q(l-2) - v_2 - v_1$

(ii) $w = v_2$인 경우: $d(v, w) = 2$

$l = 4, 5, 6$: 보조 정리 1 참조

$l = 7$: $v_0 - v_1 - v_5 - v_4 - v_3 - v_7 - v_6 - v_2$

$8 \le l \le 14$: $v_0 - Q(l-1) - v_2$

(iii) $w = v_3$인 경우: $d(v, w) = 2$

$l = 4, 5, 6$: 보조 정리 1 참조

$l = 7$: $v_0 - Q(5) - v_2 - v_3$

$l = 8$: $v_0 - v_4 - v_8 - v_7 - v_6 - v_5 - v_1 - v_2 - v_3$

$9 \le l \le 14$: $v_0 - Q(l-2) - v_2 - v_3$

(iv) $w = v_4$인 경우: $d(v, w) = 1$

$l = 3, 4, 5, 6$: 보조 정리 1 참조

$l = 7$: $v_0 - v_1 - v_2 - v_3 - v_7 - v_6 - v_5 - v_4$

$l = 8$: $v_0 - Q(5) - v_2 - v_3 - v_4$

$l = 9$: $v_0 - Q(5) - v_2 - v_6 - v_5 - v_4$

$10 \le l \le 14$: $v_0 - Q(l-3) - v_2 - v_3 - v_4$

(v) $w = v_5$인 경우: $d(v, w) = 2$

$l = 4$: $v_0 - v_1 - v_2 - v_6 - v_5$

$l = 5$: $v_0 - v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5$

$l = 6$: $v_0 - v_1 - v_2 - v_3 - v_7 - v_6 - v_5$

$l = 7$: $v_0 - v_1 - v_2 - v_6 - v_7 - v_3 - v_4 - v_5$

$l = 8$: $v_0 - Q(5) - v_2 - v_1 - v_5$

$l = 9$: $v_0 - Q(5) - v_2 - v_3 - v_4 - v_5$

$l = 10$: $v_0 - Q(7) - v_2 - v_1 - v_5$

$11 \le l \le 14$: $v_0 - Q(l-4) - v_2 - v_3 - v_4 - v_5$

(vi) $w = v_6$인 경우: $d(v, w) = 3$

$l = 5$: $v_0 - v_4 - v_5 - v_1 - v_2 - v_6$

$l = 6$: $v_0 - v_4 - v_3 - v_2 - v_1 - v_5 - v_6$

$l = 7$: $v_0 - Q(5) - v_2 - v_6$

$l = 8$: $v_0 - v_4 - v_8 - v_7 - v_3 - v_2 - v_1 - v_5 - v_6$

$9 \le l \le 11$: $v_0 - Q(l-2) - v_2 - v_6$

$12 \le l \le 14$: $v_0 - Q(l-5) - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6$

(vii) $w = v_7$인 경우: $d(v, w) = 3$

$l = 5$: $v_0 - v_4 - v_3 - v_2 - v_6 - v_7$

$l = 6$: $v_0 - v_4 - v_5 - v_1 - v_2 - v_6 - v_7$

$l = 7$: $v_0 - v_4 - v_3 - v_2 - v_1 - v_5 - v_6 - v_7$

$l = 8$: $v_0 - Q(5) - v_2 - v_6 - v_7$

$l = 9$: $v_0 - v_1 - v_5 - v_9 - v_8 - v_4 - v_3 - v_2 - v_6 - v_7$

$10 \le l \le 11$: $v_0 - Q(l-3) - v_2 - v_6 - v_7$

$l = 12$: $v_0 - Q(7) - v_2 - v_1 - v_5 - v_6 - v_7$

$13 \le l \le 14$: $v_0 - Q(l-6) - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6 - v_7$

(viii) $w = v_8$인 경우: $d(v, w) = 2$

$l = 4$: $v_0 - v_1 - v_5 - v_4 - v_8$

$l = 5$: $v_0 - v_4 - v_5 - v_6 - v_7 - v_8$

$l = 6$: $v_0 - v_1 - v_2 - v_6 - v_5 - v_4 - v_8$

$l = 7$: $v_0 - v_4 - v_5 - v_1 - v_2 - v_6 - v_7 - v_8$

$l = 8$: $v_0 - v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6 - v_7 - v_8$

$l = 9$: $v_0 - Q(5) - v_2 - v_3 - v_4 - v_8$

$l = 10$: $v_0 - Q(5) - v_2 - v_1 - v_5 - v_4 - v_8$

$l = 11$: $v_0 - Q(7) - v_2 - v_3 - v_4 - v_8$

$l = 12$: $v_0 - Q(7) - v_2 - v_1 - v_5 - v_4 - v_8$

$l = 13$: $v_0 - Q(7) - v_2 - v_1 - v_5 - v_6 - v_7 - v_8$

$l = 14$: $v_0 - Q(7) - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6 - v_7 - v_8$ □

정리 2 $G(2^m, 4)$, $m \ge 3$은 almost panconnected 그래프이다.

증명 m에 대한 수학적 귀납법으로 증명하기로 한다. $m=3$, 4인 경우는 성립함을 보조정리 1, 2에서 보였다. $v=v_0$라고 두고, w가 각각 G_0, G_1, G_2에 속하는 경우를 고려한다. w가 G_3에 속하는 경우는 G_1에 속하는 경우와 대칭이다.

경우 1 w가 G_0에 속하는 경우

G_0 상에서 v에서 w까지 경로를 P_0라고 하자. P_0의 길이 l_0는 $d(v,w)+2 \le l_0 \le 2^{m-2}-1$을 만족한다. 이제 길이 2^{m-2} 이상인 경로를 설계하면 된다. P_0에서 인접한 두 정점을 v', w'이라고 한다. G_1 상에서 v'과 인접한 정점을 v'', w'과 인접한 정점을 w''이라고 한다. G_1 상에서 길이 l_1, $3 \le l_1 \le 2^{m-2}-1$인 v''- w'' 경로 P_1이 존재한다. v''과 w''은 서로 인접함에 유의한다. 경로 $P_1' = P_0 + P_1 + (v', v'') + (w', w'') - (v', w')$의 길이 l_1'은 $d(v,w)+2+3+1 \le l_1' \le 2 \cdot 2^{m-2}-1$을 만족한다. $d(v,w)$는 G_0의 지름 $\lceil (3(m-2)-1)/4 \rceil$ 이하이고, $\lceil (3(m-2)-1)/4 \rceil + 6 \le 2^{m-2}$이므로, l_1'은 $2^{m-2} \le l_1' \le 2 \cdot 2^{m-2}-1$인 임의의 정수일 수 있다.

P_1상에서 인접한 두 정점을 x, y라고 하고, G_2 상에서 각각 x, y에 인접한 정점을 x', y'이라고 하자. P_2를 G_2상의 x'- y' 경로라고 하면, P_2의 길이 l_2는 $3 \le l_2 \le 2^{m-2}-1$이다. $P_2' = P_1' + P_2 + (x,x') + (y,y') - (x,y)$의 길이 l_2'은 $d(v,w)+2+3+3+2 \le l_2' \le 3 \cdot 2^{m-2}-1$이다. l_2'이 $2 \cdot 2^{m-2} \le l_2' \le 3 \cdot 2^{m-2}-1$인 임의의 정수가 됨을 알 수 있다. 마찬가지 방식으로 P_2'에서 G_2 상의 인접한 두 정점을 이용하여 G_3로 확장할 수 있고, 그 경로의 길이 l_3'이 $3 \cdot 2^{m-2} \le l_3' \le 2^m-1$임을 쉽게 보일 수 있다.

경우 2 w가 G_1에 속하는 경우

먼저 $d(v,w)=1$인, 즉 $w=v_1$인 경우를 생각한다. $v' = v_{2^m-4}$, $w' = v_{2^m-3}$이라고 둔다. v와 v', w와 w'은 서로 인접하다. 경로 v- v'- w'- w의 길이는 3이다. 길이 4인 경로로는 v- v_{2^m-1}- v_{2^m-2}- v_{2^m-3}- w가 있다. 이제 길이 5 이상인 경로를 설계하면 된다. G_0상의 v- v' 경로를 P_0라고 하면, 길이 l_0는 $3 \le l_0 \le 2^{m-2}-1$이다. $P_0' = P_0 + (v', w') + (w', w)$의 길이 l_0'은 $5 \le l_0' \le 2^{m-2}+1$이다.

G_1 상에서 w'- w 경로를 P_1이라고 하자. 그 길이 l_1은 $3 \le l_1 \le 2^{m-2}-1$이다. $P_1' = P_0 + (v', w') + P_1$이라고 두면, 그 길이 l_1'은 $7 \le l_1' \le 2 \cdot 2^{m-2}-1$이다. 따

라서 길이가 $2 \cdot 2^{m-2}-1$ 이하인 경로를 모두 설계하였다. 나머지는 위의 경우 1과 마찬가지로 경로 $P_1{}'$에서 G_1에 있는 인접한 두 정점을 이용하여 경로를 G_2로 확장하고, 또 그 경로를 G_3로 확장함으로써 길이 2^m-1 이하인 경로를 설계할 수 있다.

이제 남은 $d(v,w) \geq 2$인 경우를 고려하기로 한다. v에 인접한 G_1의 정점을 w', w에 인접한 G_0의 정점을 v'이라고 하자. $d(v,w) = d(v,v') + 1$임에 유의한다. G_0에서 v-v' 경로를 P_0라고 하면, 그 길이 l_0는 $d(v,v') + 2 \leq l_0 \leq 2^{m-2}-1$이다. $P_0{}' = P_0 + (v',w)$의 길이 $l_0{}'$은 $d(v,v') + 2 + 1 = d(v,w) + 2 \leq l_0{}' \leq 2^{m-2}$이다. 이제 길이가 2^{m-2} 이상인 경로를 설계한다.

G_0에서 v에 인접하면서 w에 인접하지 않은 정점을 v''이라고 하자. $v' \neq v''$이다. v''에 인접한 G_1의 정점을 w''이라고 하자. G_0에서 v-v'' 경로를 P_0라고 하면, 그 길이 l_0는 $3 \leq l_0 \leq 2^{m-2}-1$이다. G_1에서 w''-w 경로를 P_1이라고 하면, 길이 l_1은 $d(w'',w) + 2 \leq l_1 \leq 2^{m-2}-1$이다. $P_1{}' = P_0 + P_1 + (v''.w'')$의 길이 $l_1{}'$은 $3 + d(w'',w) + 2 + 1 \leq l_1{}' \leq 2 \cdot 2^{m-2}-1$이다. 그런데, $d(w'',w)$은 G_1의 지름 이하이므로 결국 $l_1{}'$은 $2^{m-2} \leq l_1{}' \leq 2 \cdot 2^{m-2}-1$인 임의의 정수가 될 수 있다. 길이가 $2 \cdot 2^{m-2}$ 이상인 경로는 경우 1과 마찬가지 방식으로 설계할 수 있어서 생략하기로 한다.

경우 3 w가 G_2에 속하는 경우

먼저 $d(v,w) = 2$인 경우, 즉 $w = v_2$인 경우를 고려한다. $x = v_1$이라고 한다. x는 v와 w에 인접한 G_1의 정점이다. $v' = v_4$, $x' = v_5$, $w' = x_6$라고 둔다. 길이 4인 경로는 v-v'-x'-w'-w가 있다. G_0상에서 v-v' 경로를 P_0라고 두면, 그 길이 l_0는 $3 \leq l_0 \leq 2^{m-2}-1$이다. $P_0{}' = P_0 + (v',y) + (y,w)$, 그 길이를 $l_0{}'$이라고 하자. 여기서 $y = v_3$이다. $l_0{}'$은 $5 \leq l_0{}' \leq 2^{m-2}+1$이다. 이제 길이가 $2^{m-2}+2$ 이상인 경로를 설계하면 된다.

G_1상에서 x-x' 경로를 P_1, 그 길이를 l_1이라고 두면, $3 \leq l_1 \leq 2^{m-2}-1$이다. $P_1{}' = P_0 + P_1 + (v',x') + (x,w)$의 길이 $l_1{}'$은 $3+3+2 = 8 \leq l_1{}' \leq 2 \cdot 2^{m-2}$이다. 따라서 $2^{m-2}+2 \leq l_1{}' \leq 2 \cdot 2^{m-2}$을 만족한다.

$x'' = v_9$, $w'' = v_{10}$이라고 하자. G_0상의 v-v' 경로를 P_0, G_1상의 x'-x'' 경로를 P_1, G_2상의 w''-w 경로를 P_2라고 둔다. P_0, P_1의 길이 l_0, l_1은 $3 \leq l_0$, $l_1 \leq 2^{m-2}-1$이고, P_2의 길이 l_2는 $4 \leq l_2 \leq 2^{m-2}-1$이다. $P_2{}' = P_0 + P_1 + P_2 +$

$(v', x') + (x'', w'')$이라고 두면, 그 길이 $l_2{}'$은 $3 + 3 + 4 + 2 = 12 \le l_2{}' \le 3 \cdot 2^{m-2} - 1$이다. $l_2{}'$이 $2 \cdot 2^{m-2} + 1 \le l_2{}' \le 3 \cdot 2^{m-2} - 1$인 임의의 정수가 될 수 있다. 나머지 길이가 $3 \cdot 2^{m-2}$ 이상인 경로는 경우 1과 마찬가지로 $P_2{}'$을 G_3로 쉽게 확장할 수 있다.

마지막으로 남은 것은 $d(v, w) \ge 3$인 경우이다. v에 인접한 G_1의 정점을 x, x에 인접한 G_2의 정점을 w'이라고 한다. 그리고 w에 인접한 G_1의 정점을 x', x'에 인접한 G_0의 정점을 v'이라고 하자. 일반성을 잃지 않고, $d(v, w) = d(v, v') + 2$라고 가정한다. G_0 상에서 v-v' 경로를 P_0라고 하면, 그 길이 l_0는 $d(v, v') + 2 \le l_0 \le 2^{m-2} - 1$이다. $P_0{}' = P_0 + (v', x') + (x', w)$라고 두면, 그 길이 $l_0{}'$은 $d(v, v') + 2 + 2 = d(v, w) + 2 \le l_0{}' \le 2^{m-2} + 1$이다. 길이 $2^{m-2} + 2$ 이상인 경로를 설계하면 된다.

v''을 G_0에서 v에 인접하면서, v'과 다른 정점이라고 하자. v''에 인접한 G_1의 정점을 x'', x''에 인접한 G_2의 정점을 w''이라고 한다. G_0에서 v-v'' 경로를 P_0, G_1에서 x''-x' 경로를 P_1이라고 하고, 그 길이를 각각 l_0, l_1이라고 하면 $3 \le l_0 \le 2^{m-2} - 1$, $d(x'', x') + 2 \le l_1 \le 2^{m-2} - 1$이다. $P_1{}' = P_0 + P_1 + (v'', x'') + (x', w)$의 길이 $l_1{}'$은 $3 + d(x'', x') + 2 + 2 = d(x'', x') + 6 + 1 \le l_1{}' \le 2 \cdot 2^{m-2}$이다. $d(x'', x')$는 G_1의 지름 이하이므로, $l_1{}'$은 $2^{m-2} + 1 \le l_1{}' \le 2 \cdot 2^{m-2}$인 임의의 정수가 될 수 있다. 이제 길이 $2 \cdot 2^{m-2} + 1$ 이상인 경로를 설계한다.

P_0는 위와 같이 G_0에서 v-v'' 경로라 두고, P_1은 G_1에서 x''-x 경로라 한다. 그 길이를 각각 l_0, l_1이라고 하면 $3 \le l_0$, $l_1 \le 2^{m-2} - 1$이다. G_2 상에서 w'-w 경로를 P_2라고 하면, 길이 l_2는 $d(w', w) + 2 \le l_2 \le 2^{m-2} - 1$이다. $P_2{}' = P_0 + P_1 + P_2 + (v'', x'') + (x, w')$의 길이 $l_2{}'$는 $3 + 3 + d(w', w) + 2 + 2 = d(w', w) + 6 + 4 \le l_2{}' \le 3 \cdot 2^{m-2} - 1$이 된다. $d(w', w)$가 G_2의 지름 이하라는 점을 이용하면, $l_2{}'$가 $2 \cdot 2^{m-2} + 1 \le l_2{}' \le 3 \cdot 2^{m-2} - 1$인 임의의 정수임을 알 수 있다. 길이 $3 \cdot 2^{m-2}$ 이상인 경로는 경우 1과 마찬가지로 $P_2{}'$를 G_3로 확장하여 설계할 수 있다. □

따름 정리 2 $G(2^m, 4)$, $m \ge 3$은 almost pancyclic 그래프이다.

$G(2^m, 4)$가 길이 3인 사이클을 가지고 있지 않으므로, 인접한 정점 v, w 사이에 길이 $2 = d(v, w) + 1$인 경로가 없다는 것을 알 수 있다. $G(2^4, 4)$에서 v_0와 v_5사이의 거리는 2이면서, 그 두 정점 사이에 길이 3인 경로가 존재하지 않는다. 이것을 일반화하여 $G(2^m, 4)$, m 짝수에서 v_0와 v_k, $k = 2^{m-2} + 2^{m-4} + \cdots + 2^0$의 거리는 $m/2$인데, 그

두 정점 사이에 길이 $m/2+1$인 경로가 존재하지 않음을 보일 수 있다.

3.3 $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 3$

재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$가 어떤 정수 l에 대해서 길이 l인 사이클을 가지는가하는 문제를 [1]에서 다음과 같이 고려하였다.

정리 3 $G(2^m, 2^k)$는 l이 짝수이고 $4 \leq l \leq 2^m$이거나, 혹은 l이 홀수이고 $2^k+1 \leq l \leq 2^m$일 때 길이 l인 사이클을 가지며, 그 역도 성립한다.

위의 정리를 따르면 $G(2^m, 2)$는 pancyclic 그래프이며, $G(2^m, 4)$는 almost pancyclic 그래프이다. 그리고 $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 3$은 길이 2^k 이상인 모든 사이클을 가짐을 알 수 있다. 이 정리를 이용하면 $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 3$에서 길이가 $d(v, w)+2$ 이상인 경로가 존재하지 않는 정점쌍이 존재함을 알 수 있다.

정리 4 $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 3$에서 길이가 $d(v, w)+2^k-3$인 경로가 존재하지 않는 정점 쌍 v, w가 존재한다.

증명 만약 $v=v_0$, $w=v_1$ 사이에 길이 $d(v, w)+2^k-3=2^k-2$인 경로가 존재한다고 하자. 그 경로는 에지 (v_0, v_1)을 포함하지 않는다. 이 경로에 에지 (v_0, v_1)을 추가하면 길이 2^k-1인 사이클이 되는데, 정리 1에 모순된다. □

4 결론

이 논문에서는 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 panconnected 성질을 고찰하였다. $G(2^m, 2)$가 panconnected 그래프임을, $G(2^m, 4)$가 almost panconnected 그래프임을 보였다. $k \geq 3$인 경우 $G(2^m, 2^k)$가 임의의 두 정점 v, w 사이에, $d(v, w)+2^k-2 \leq l \leq 2^m-1$인 모든 l에 대해서 길이 l인 경로가 존재하는가 하는 것은 미해결 문제이다.

참고문헌

[1] 박 정흠, 좌 경룡, "재귀원형군의 위상 특성: 서로소인 사이클과 그래프 invariant," *한국정보과학회 논문지* 26(8), pp. 999-1008, 1999.

[2] 박 정흠, 좌 경룡, "재귀원형군의 위상 특성: 서로소인 경로," *한국정보과학회 논문지*

26(8), pp. 1009-1023, 1999.

[3] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, 5th printing, American Elsevier Publishing Co., Inc., 1976.

[4] C. C. Chen and N. F. Quimpo, "On strongly hamiltonian abelian group graphs," *Lecture Notes in Mathematics* 884 (Springer, Berlin), Australian Conference on Combinatorial Mathematics, pp. 23-34, 1980.

[5] G. Gauyacq, C. Micheneau, and A. Raspaud, "Routing in recursive circulant graphs: edge forwarding index and hamiltonian decomposition," in *Proc. of International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science WG'98*, Smolenice Castle, Slovak Republic, pp. 227-241, 1998.

[6] R. J. Gould, "Updating the hamiltonian problem - a survey," *Journal of Graph Theory* 15, pp. 121-157, 1991.

[7] C. Micheneau, "Disjoint hamiltonian cycles in recursive circulant graphs," *Information Processing Letters* 61, pp. 259-264, 1997.

[8] J.-H. Park, "Hamiltonian decomposition of recursive circulants," in Proc. *International Symposium on Algorithms and Computation ISAAC'98*, Taejon, Korea, pp. 297-306, 1998.

[9] J.-H. Park and K.-Y. Chwa, "Recursive circulant: a new topology for multicomputer networks," in Proc. *International Symposium on Parallel Architectures, Algorithms and Networks ISPAN'94*, Kanazawa, Japan, pp. 73-80, 1994.

[10] J.-H. Park and K.-Y. Chwa, "Recursive circulants and their embeddings among hypercubes," *Theoretical Computer Science* 244, pp. 35-62, 2000.

[11] D. A. Reed and R. M. Fujimoto, *Multicomputer Networks: Message-Based Parallel Processing*, The MIT Press, 1987.