재귀원형군의 위상 특성: 서로소인 사이클과 그래프 Invariant*

박 정흠[1], 좌 경룡[2]

[1]가톨릭대학교 컴퓨터공학부
420-743 경기도 부천시 원미구 역곡 2동 산 43-1
jhpark@tcs.cuk.ac.kr
전화 (032) 340-3366, 팩스 (032) 340-3361

[2]한국과학기술원 전산학과
305-701 대전시 유성구 구성동 373-1
kychwa@jupiter.kaist.ac.kr
전화 (042) 869-3513, 팩스 (042) 869-3510

Topological Properties of Recursive Circulants: Disjoint Cycles and Graph Invariants

Jung-Heum Park[1] and Kyung-Yong Chwa[2]

[1]School of Computer Science and Engineering
Catholic University of Korea
Yokkok 2-dong 43-1, Wonmi-gu, Puchon City, Kyonggi-do 420-743
jhpark@tcs.cuk.ac.kr
TEL (032) 340-3366, FAX (032) 340-3361

[2]Department of Computer Science
Korea Advanced Institute of Science and Technology
Kusong-dong 373-1, Yusong-gu, Taejon 305-701
kychwa@jupiter.kaist.ac.kr
TEL (042) 869-3513, FAX (042) 869-3510

---

* 이 논문은 1997년 학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.

재귀원형군의 위상 특성: 서로소인 사이클과 그래프 invariant

Topological Properties of Recursive Circulants: Disjoint Cycles and Graph Invariants

요약

이 논문은 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$를 그래프 이론적 관점에서 고찰하고 정점이 서로소인 사이클과 그래프 invariant에 관한 위상 특성을 제시한다. 재귀원형군은 [10]에서 제안된 다중 컴퓨터의 연결망 구조이다. 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$가 길이 l인 사이클을 가질 필요 충분 조건을 구하고, 이 조건하에서 $G(2^m, 2^k)$는 가능한 최대 개수의 정점이 서로소이고 길이가 l인 사이클을 가짐을 보인다. 그리고 정점 및 에지 채색, 최대 클릭, 독립 집합 및 정점 커버에 대한 그래프 invariant를 분석한다.

Abstract

In this paper, we investigate recursive circulant $G(2^m, 2^k)$ from the graph theory point of view and present topological properties of $G(2^m, 2^k)$ concerned with vertex-disjoint cycles and graph invariants. Recursive circulant is an interconnection structure for multicomputer networks proposed in [10]. A necessary and sufficient condition for recursive circulant $G(2^m, 2^k)$ to have a cycle of length l is derived. Under the condition, we show that $G(2^m, 2^k)$ has the maximum possible number of vertex-disjoint cycles of length l. We analyze graph invariants on vertex and edge coloring, maximum clique, independent set and vertex cover.

1 서론

고성능 컴퓨터를 설계하기 위해서 다중 컴퓨터 네트워크를 구성하는 것은 비용이 적게 드는 방식이다[11]. 다중 컴퓨터 네트워크는 개별 기억장치를 가지는 노드와 노드를 서로 이어주는 통신 링크로 이루어져 있다. 다중 컴퓨터 네트워크에서 연결망 구조는 전체 시스템의 성능에 크게 영향을 미치는 것으로 알려져 있다. 연결망 구조는 그래프로 자연스럽게 모델할 수 있는데, 이 때 노드는 그래프의 정점에 대응되고 통신 링크는 에지에 대응된다.

재귀원형군은 [10]에서 제안된 다중컴퓨터의 연결망 구조이다. 재귀원형군 $G(N,d)$는 N개의 노드 $\{v_0, v_1, \cdots, v_{N-1}\}$을 가지고 $s+d^i \equiv t \pmod N$을 만족하는 정수 i, $0 \le i \le \lceil \log_d N \rceil - 1$가 존재하면 두 노드 v_s, v_t를 잇는 에지가 있다. 이 에지 (v_s, v_t)의 크기는 d^i이라고 한다. 이 논문에서는 N과 d가 2의 거듭제곱으로 제한된 재귀원형군, 즉 $N=2^m$, $d=2^k$인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$를 고려한다.

사이클은 그래프 이론에서 중요한 개념으로 간주될 뿐만 아니라 사이클에 관련된 여러가지 성질은 다중컴퓨터 위상의 특성을 설명하는데 필수적이다. 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$는 길이가 2^m인 해밀톤 사이클을 가지고 있다. 더구나 에지가 서로소인 해밀톤 사이클로 분할하는 해밀톤 분할이 가능함이 알려져 있다[8,9]. 또한 분지수가 3 이상인 재귀원형군은 임의의 정점쌍을 잇는 해밀톤 경로가 존재하는 해밀톤 연결된 그래프이다. 이것은 임의의 에지를 지나는 해밀톤 사이클이 존재한다는 것을 의미한다. 이러한 성질은 재귀원형군을 포함하는 abelian 군에 대한 Cayley 그래프 부류에서 이분(bipartite) 그래프가 아니면 성립하는 것으로 알려져 있다[5].

이 논문에서는 어떤 정수 l이 주어져 있을 때, 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$가 길이 l인 사이클을 가지는가 하는 사이클 존재 문제와, 길이 l인 사이클이 존재할 때 가능한 최대 개수의 정점이 서로소이고 길이가 l인 사이클을 가지는가 하는 사이클 패킹 문제를 고려한다. 여기서 정점이 서로소인 사이클이라는 것은 모든 정점이 서로 다른 사이클을 말하는 것이고, 가능한 최대 개수는 $\lfloor 2^m/l \rfloor$개를 말한다.

문제 1 (a) 어떤 정수 l에 대해서 $G(2^m, 2^k)$는 길이 l인 사이클을 가지는가?
(b) 어떤 정수 l에 대해서 $G(2^m, 2^k)$는 길이 l이고 정점이 서로소인 사이클 $\lfloor 2^m/l \rfloor$개를 패킹할 수 있는가?

이 문제는 재귀원형군 다중컴퓨터의 병렬 작업 할당에 응용할 수 있다. 서로 독립적이고 노드수가 l인 링 연결망 구조를 요구하는 병렬 작업이 n개 있을 때, 서로 간섭하지 않도록 이 작업을 모두 $G(2^m, 2^k)$에 할당할 수 있는가하는 문제가 된다. 임베딩의 관점에서 다시 말하면, 노드수가 l인 링 구조 n개를 동시에 $G(2^m, 2^k)$에 신장율(dilation)과 밀집율

(congestion)이 모두 1인 임베딩(embedding)이 존재하느냐하는 문제이다. 또한 이 문제를 이용하면 고장 감내에 대한 중요한 척도중의 하나인 순차적 고장 진단도를 분석할 수 있다. 이 문제를 이용하여 하이퍼큐브의 순차적 고장 진단도의 하한이 분석된 바 있으며[7], 마찬가지 방식으로 $G(2^m, 2^k)$의 순차적 고장 진단도의 분석에 이용할 수 있다.

이 논문에서 고려하고 있는 사이클 문제에 대한 기존 연구를 살펴보면, 하이퍼큐브 Q_m은 이분 그래프이며 $2\times2^{m-1}$ 그리드(grid) 그래프를 스패닝 부그래프로 가지고 있다. 따라서 길이가 짝수인 모든 사이클을 가지는 bipancyclic 그래프가 되며, 길이가 짝수인 사이클을 가능한 최대 개수로 패킹할 수 있다. 또한 2차원 그리드 그래프도 모든 짝수 사이클을 가지고 있어 bipancyclic 그래프이며, 정점의 수가 짝수인 경우에 길이가 짝수인 사이클을 가능한 최대 개수로 패킹할 수 있음이 밝혀져 있다[2]. 일반적인 그래프에서 정점이 서로소인 사이클에 대한 연구도 있는데, 그 중에 최소 분지수가 δ인 그래프는 길이가 같고 정점이 서로소인 사이클을 최소한 $\delta/1024$개 가진다고 밝힌 것이 있다[3]. 길이가 같은 사이클이지만 그 길이를 고정하지 않은 점은 이 논문에서 고려하고 있는 문제와 다른점이다.

그래프 invariant라고 하는 것은 서로 동형인 그래프가 모두 같은 값을 가지는 수를 말한다. 다양한 그래프 invariant가 문헌에 소개되고 또한 연구되고 있다. 이 논문에서는 그래프 invariant 중에 기본적이고 또 응용 분야가 많다고 알려진 그래프 invariant를 분석하고자 한다. 그래프 채색, 최대 클릭, 그리고 독립 집합 및 정점 커버를 고찰하기로 한다. 연결도나 지름 등은 [10]에 분석되어 있다.

서로 인접한 정점에 같은 색이 할당되지 않도록 정점에 색을 칠할 때 필요한 최소 색의 수를 정점 색수라고 한다. 마찬가지로 에지에 채색을 할 때 서로 인접한 에지에 같은 색이 할당되지 않기 위해서 필요한 최소 색수를 에지 색수라고 한다. 그래프의 클릭은 완전 부그래프이다. 최대 클릭은 정점의 수가 최대인 클릭을 말하며, 이 때 정점의 수를 클릭수라고 한다.

그래프의 독립 집합은 정점의 부분 집합 S인데, 이 때 S에 속한 어떤 두 정점도 서로 인접하지 않아야 한다. 크기가 최대인 독립 집합을 최대 독립 집합이라고 하고, 이 때 독립 집합의 크기를 독립수라고 한다. 정점 커버는 역시 정점의 부분 집합으로 그래프에 있는 모든 에지가 정점 커버에 속한 최소한 한 정점에 인접하여야 한다. 크기가 최소인 정점 커버를 최소 정점 커버라고 하며, 이 때 정점의 수를 정점 커버수라고 한다. S를 독립 집합이라 하면, $V-S$는 정점 커버가 되므로 독립수와 정점 커버수의 합은 항상 그래프의 정점수와 같게 된다.

문제 2 (a) 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 정점 및 에지 색수는 얼마인가?
(b) $G(2^m, 2^k)$의 클릭수는 얼마인가?
(c) $G(2^m, 2^k)$의 독립수 및 정점 커버수는 얼마인가?

그외 재귀원형군의 위상 특성으로 경로와 관련하여 최단 경로[10], 길이가 제한된 서로소인 경로[1] 등에 대하여 연구되어 있다. 서로소인 경로는 고장 감내 라우팅에 응용할 수 있으며, 고장 지름이나 persistence를 분석할 때 이용할 수 있다. 재귀원형군과 다른 연결망 구조의 위상 특성에 대한 연구로는 [6,12] 등이 있다.

앞으로 따로 말하지 않으면 사칙연산은 모두 모듈로 2^m 연산을 가정한다. 여기서 정의하지 않은 그래프 이론적인 용어는 [4]를 따른다. 이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서는 재귀원형군에 대한 기본적인 성질을 살펴본다. 3절에서는 사이클 존재 문제와 패킹 문제를 고찰하고, 4절에서는 그래프 invariant를 분석한다. 마지막으로 5절에서 결론을 맺기로 한다.

2 재귀원형군의 성질

재귀원형군의 기본적인 성질은 [10]에 잘 나타나 있다. 이 절에서는 논문의 전개에 필요한 성질을 간략히 소개하기로 한다. 우선 재귀원형군 $G(N, d)$는 노드 대칭적인 성질을 가진다. 즉 임의의 노드 v_i를 v_j에 대응시키는 automorphism이 존재한다. 그리고 $G(N, d)$에서 N과 d에 가해지는 제약에 따라 재귀원형군을 여러 부류로 나눌 수 있다. 아래 그림 1은 여러 부류의 재귀원형군 사이의 포함관계를 표현하고 있다.

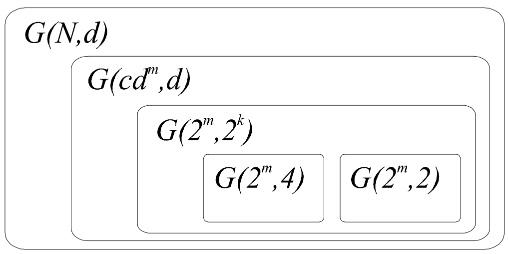


그림 1 재귀원형군의 부류

재귀원형군 $G(N, d)$는 $N = cd^m$, $1 \le c < d$일 때 재귀적 구조를 갖는다. 다시 말하면, $G(cd^m, d)$는 아래 성질을 이용하여 재귀적으로 정의할 수 있다.

성질 1 V_i를 다음과 같이 정의되는 $G(cd^m, d)$, $m \ge 1$의 정점 부분집합이라고 하자: $V_i = \{v_j \mid j \equiv i \pmod d\}$. 모든 $0 \le i < d$에 대해서 V_i로 유도된 $G(cd^m, d)$의 부그래프는 $G(cd^{m-1}, d)$와 동형(isomorphic)이다.

$G(cd^m, d)$, $m \ge 1$는 다음과 같이 d개의 $G(cd^{m-1}, d)$를 이용하여 설계할 수 있다. $G_i(V_i, E_i)$, $0 \le i < d$를 $G(cd^{m-1}, d)$와 동형인 그래프라고 하고 $V_i =$

$\{v_0^i, v_1^i, \cdots, v^i_{cd^{m-1}-1}\}$라 두자. 그리고 G_i는 v_j^i을 v_j에 대응시키는 사상에 의해서 $G(cd^{m-1}, d)$와 동형이라고 하자. v_j^i를 v_{jd+i}로 다시 레이블한 다음, 정점 집합을 $\bigcup_{0 \le i < d} V_i$이라고 두고, 에지 집합을 $\bigcup_{0 \le i < d} E_i \cup X$이라고 두면 $G(cd^m, d)$가 정의된다. 여기서 X는 크기가 1인 에지의 집합으로 $\{(v_j, v_{j'}) \mid j+1 \equiv j' \pmod{cd^m}\}$이다. 4개의 $G(8,4)$로 $G(32,4)$을 설계한 예가 그림 2에 있다.

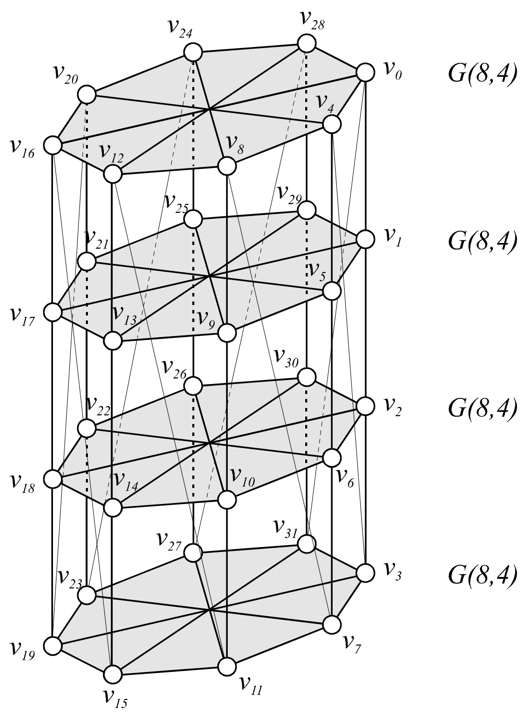


그림 2 $G(32,4)$의 재귀적 구조

이 논문에서는 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$에 한정하여 관심을 두고 있다. 당연히 $G(2^m, 2^k)$는 $G(cd^m, d)$ 부류에 속하므로 재귀적 구조를 갖는다. $G(2^m, 2^k)$의 재귀적 구조에서는 $G(2^{m-k}, 2^k)$와 동형인 G_0, $G_1, \cdots$, G_{2^k-1}에 크기가 1인 에지가 2^m개 추가되어 있다. $G(2^m, 2^k)$의 정점을 표기할 때 단순히 v_j, $0 \le j < 2^m$와 같은 형태로 표현할 수도 있고, 혹은 재귀적 구조가 잘 나타나도록 v_j^i, $0 \le i < 2^k$, $0 \le j < 2^{m-k}$와 같은 형태로 표현하기도 한다. 앞으로 위의 두 표기를 혼용하기로 한다.

재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 분지수 $\delta_{m,k}$에 대해서 다음이 성립한다. 여기서 k가 $m-1$을 나누는 경우는 대각 에지, 즉 크기가 $2^m/2$인 에지를 가지는 경우이다.

성질 2 (a) $\delta_{m,k} = \delta_{m-k,k}+2$, $m>k$; $\delta_{m,k} = 2$, $m\le k$, $m\ge 2$; $\delta_{m,k} = 1$, $m\le k$, $m=1$.

(b) $\delta_{m,k} = \begin{cases} 2\lceil m/k\rceil -1 & k\text{가 } m-1\text{을 나눌 때;} \\ 2\lceil m/k\rceil & \text{그렇지 않을때.} \end{cases}$

3 서로소인 사이클

이 절에서는 어떤 정수 l에 대해서 $G(2^m,2^k)$는 길이 l인 사이클을 가지는가 하는 문제와 어떤 정수 l에 대해서 $G(2^m,2^k)$는 길이 l이고 정점이 서로소인 사이클 $\lfloor 2^m/l\rfloor$ 개를 패킹할 수 있는가 하는 문제를 고찰한다. 여기서 $m>k$인 재귀원형군 $G(2^m,2^k)$을 고려한다. 그렇지 않은 경우에 $G(2^m,2^k)$는 K_2와 동형이거나 혹은 길이 2^m인 사이클 그래프와 동형이 되어서 고려하는 문제가 쉽게 해결된다.

우선 그래프 $H(l,2^k)$를 정의하고자 한다. $H(l,2^k)$의 l개의 정점 $\{0,1,\cdots,l-1\}$을 가지고, 에지 집합은 $\{(i,j)\mid j=i+1$ 혹은 $j=i+2^k\}$이다. 여기서 사용한 덧셈은 모듈로 2^m 덧셈이 아닌 일반 덧셈이다. $G(2^m,2^k)$의 정점 $\{v_0,v_1,\cdots,v_{l-1}\}$로 유도된 부그래프는
정점 v_j를 $H(l,2^k)$의 정점 j에 대응 시키는 사상에 의해서 $H(l,2^k)$를 스패닝 부그래프로 포함한다.

만약 $H(l,2^k)$가 길이 l인 사이클, 즉 해밀톤 사이클을 가진다면, 연속적인 l개의 정점으로 유도된 $G(2^m,2^k)$의 부그래프도 길이가 l인 해밀톤 사이클을 가진다. 따라서 $G(2^m,2^k)$의 각 정점 부분 집합 $H_j=\{v_{jl},v_{jl+1},\cdots,j_{jl+l-1}\}$, $0\le j<\lfloor 2^m/l\rfloor$로 유도된 그래프에 길이 l인 사이클을 패킹함으로써 $\lfloor 2^m/l\rfloor$ 개의 서로소인 사이클을 패킹할 수 있게 된다. $H(l,2^k)$가 해밀톤 사이클을 가질 조건을 고찰하여 보기로 한다.

보조정리 1 l을 홀수라고 하자. $l\ge 2^k+1$이면 $H(l,2^k)$는 해밀톤 사이클을 가지며 그 역도 성립한다.

증명 $l\le 2^k-1$이면 $H(l,2^k)$는 길이 $l-1$인 경로 그래프이므로 필요 조건임은 당연하다. 충분 조건임을 증명하기로 한다. $2^k\le l<2\cdot 2^k$인 경우에는 다음과 같이 정점 0과 1을 잇는 해밀톤 경로 P_1을 정의할 수 있으며, 에지 $(0,1)$과 함께 해밀톤 사이클을 이룬다(그림 3 (a) 참조).

$$P_1 = 0,\ 2^k,\ 2^k-1,\ 2^k-2,\ \cdots,\ l-2^k,$$
$$l-1-2^k,\ l-1,\ l-2,\ l-2-2^k,$$

$$\vdots$$
$$2,\ 2^k+2,\ 2^k+1,\ 1$$

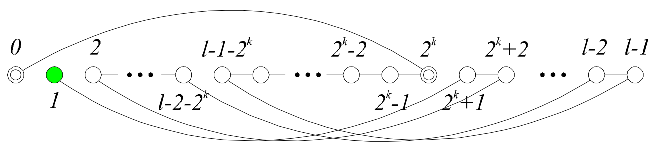
$2 \cdot 2^k \le l < 3 \cdot 2^k$인 경우에도 위와 마찬가지로 0과 1을 잇는 해밀톤 경로 P_2를 정의할 수 있다(그림 3 (b) 참조).

$$P_2 \ = \ 0,\ 2^k,\ 2 \cdot 2^k,$$
$$2 \cdot 2^k-1,\ 2^k-1,\ 2^k-2,\ 2 \cdot 2^k-2,$$
$$\vdots$$
$$l-2^k,\ l-2 \cdot 2^k,$$
$$l-1-2 \cdot 2^k,\ l-1-2^k,\ l-1,\ l-2,\ l-2-2^k,\ l-2-2 \cdot 2^k,$$
$$\vdots$$
$$2,\ 2^k+2,\ 2 \cdot 2^k+2,\ 2 \cdot 2^k+1,\ 2^k+1,\ 1$$

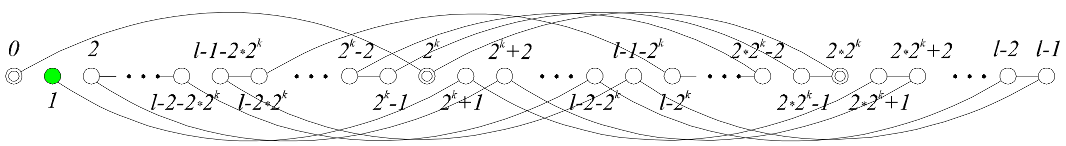
일반적인 $t>2$에 대하여 $t \cdot 2^k \le l < (t+1) \cdot 2^k$일 때 0과 1을 잇는 해밀톤 경로 P_t를 재귀적으로 설계할 수 있다(그림 3 (c) 참조). 여기서 P'_{t-2}는 P_{t-2}의 모든 정점에 $2 \cdot 2^k$를 더하여 얻어지는 경로이다.

$$P_t \ = \ 0,\ 2^k,\ 2 \cdot 2^k,\ P'_{t-2},\ 2 \cdot 2^k+1,\ 2^k+1,\ 2^k+2,\ \cdots,\ 2 \cdot 2^k-1,$$
$$2^k-1,\ 2^k-2,\ \cdots,\ 1$$

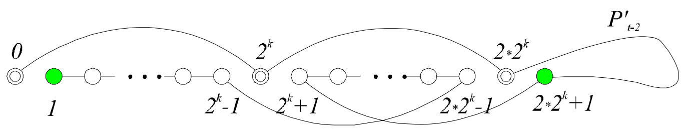
위의 방식을 반복 적용하여 $t \ge 1$인 모든 t에 대해서 P_t를 설계할 수 있으므로, 증명이 완성된다. □



(a)



(b)



(c)

그림 3 보조정리 1 증명의 설명

보조정리 2 l을 짝수라고 하자. $l \ge 2 \cdot 2^k$이면 $H(l, 2^k)$는 해밀톤 사이클을 가지며 그 역도 성립한다.

증명 필요조건임을 증명하기 위하여 $H(l, 2^k)$가 길이 l인 해밀톤 사이클을 가진다고 하자. 모순을 유도하기 위하여 $l < 2 \cdot 2^k$이라고 가정한다. 그러면 $\{l-2^k, l-2^k+1, \cdots, 2^k-1\}$에 속한 정점의 분지수는 모두 2이므로 분지수가 2인 정점을 제외한 정점 $\{0, 1, \cdots, l-1-2^k,\ 2^k,\ 2^k+1, \cdots, l-1\}$로 유도된 $H(l, 2^k)$의 부그래프에서 $l-1-2^k$와 2^k를 잇는 해밀톤 경로가 존재해야 한다(그림 4 (a) 참조). 유도된 부그래프는 $(l-2^k) \times 2$ 그리드 그래프와 동형이고 이분 그래프이다. 따라서 이 그래프의 정점에 채색을 할 때 두 가지 색이면 충분하며 같은 색으로 채색된 정점의 수는 같다. 그리고 같은 색으로 채색된 두 정점 사이에 해밀톤 경로가 존재할 수 없다. 그런데 $l-1-2^k$는 홀수이므로 정점 0과는 다른 색으로 채색되고, 2^k도 0과 인접하므로 0과 다른 색을 가져야 한다. 따라서 $l-1-2^k$와 2^k는 같은 색을 가지므로 이들 두 정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다는 사실에 모순이다.

충분조건임을 보이는 것은 보조정리 1과 유사하게 $t \cdot 2^k \le l < (t+1) \cdot 2^k$일 때 0과 1을 잇는 해밀톤 경로 P_t를 찾을 수 있으면 된다. P_2는 다음과 같이 정의된다(그림 4 (b) 참조).

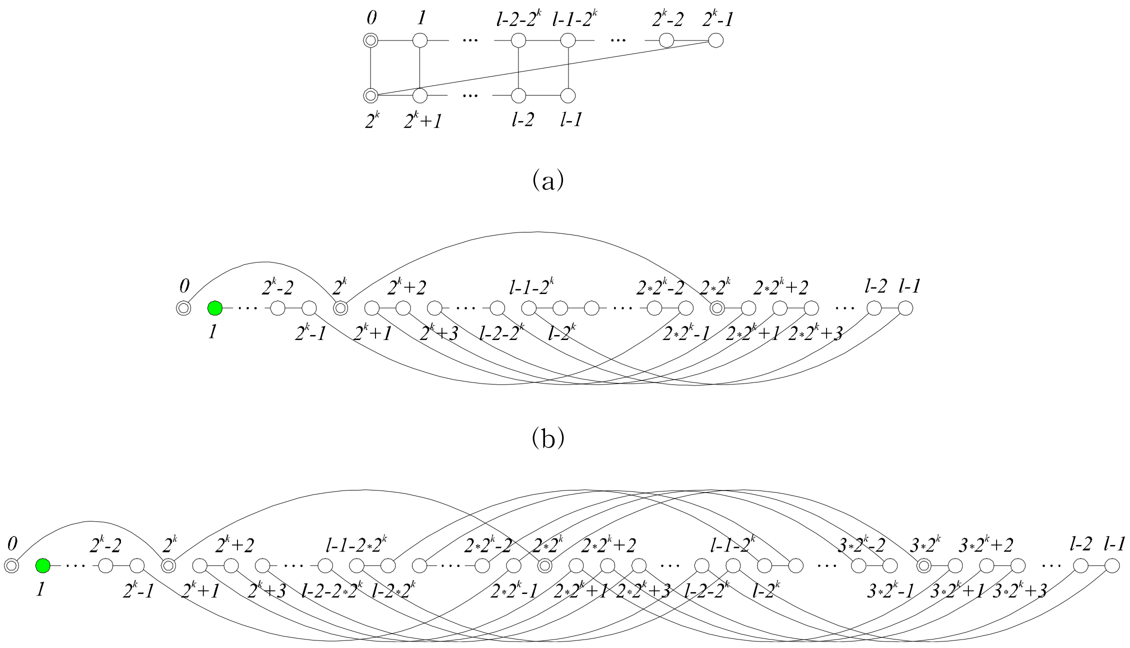
$$\begin{gathered} P_2 \;=\; 0,\ 2^k,\ 2 \cdot 2^k,\ 2 \cdot 2^k+1,\ 2^k+1, \\ 2^k+2,\ 2 \cdot 2^k+2,\ 2 \cdot 2^k+3,\ 2^k+3, \\ \vdots \\ l-2-2^k,\ l-2,\ l-1,\ l-1-2^k, \\ l-2^k,\ l+1-2^k,\ \cdots,\ 2 \cdot 2^k-1, \\ 2^k-1,\ 2^k-2,\ \cdots,\ 1 \end{gathered}$$

P_3는 다음과 같이 정의한다(그림 4 (c) 참조).

$$\begin{gathered} P_3 \;=\; 0,\ 2^k,\ 2 \cdot 2^k,\ 3 \cdot 2^k,\ 3 \cdot 2^k+1,\ 2 \cdot 2^k+1,\ 2^k+1, \\ 2^k+2,\ 2 \cdot 2^k+2,\ 3 \cdot 2^k+2,\ 3 \cdot 2^k+3,\ 2 \cdot 2^k+3,\ 2^k+3, \\ \vdots \\ l-2-2 \cdot 2^k,\ l-2-2^k,\ l-2,\ l-1,\ l-1-2^k,\ l-1-2 \cdot 2^k, \\ l-2 \cdot 2^k,\ l-2^k,\ l+1-2^k,\ l+1-2 \cdot 2^k, \\ \vdots \\ 2 \cdot 2^k-2,\ 3 \cdot 2^k-2,\ 3 \cdot 2^k-1,\ 2 \cdot 2^k-1, \end{gathered}$$

$$2^k-1,\ 2^k-2,\ \cdots,\ 1$$

$t>3$인 경우는 보조정리 1과 같은 방식으로 정의할 수 있으므로 증명이 완성된다. 여기서 설계한 해밀톤 사이클도 모두 에지 $(0,1)$을 지난다. □



(a)

(b)

(c)

그림 4 보조정리 2 증명의 설명

보조정리 1과 2에 의해서 (i) l이 홀수이고 $l \geq 2^k+1$일 때와 (ii) l이 짝수이고 $l \geq 2 \cdot 2^k$일 때에는 사이클 존재 문제 뿐만 아니라, 사이클 패킹 문제가 해결되었다. 이제 나머지 경우에 대해서 생각하여 보기로 한다.

$G(2^m, 2^k)$에서 크기가 1이거나 2^k이 아닌 모든 에지를 제거하면 분지수가 4인 그래프를 얻을 수 있다(이 그래프는 circulant 그래프 $C_{2^m}(1, 2^k)$가 된다). 이 그래프는 $2^k \times 2^{m-k}$ 그리드 그래프를 스패닝 부그래프로 포함한다. 그리드 그래프는 bipancyclic이며, 정점의 수가 짝수인 경우 항상 임의의 짝수 길이 l인 서로소인 사이클로 패킹할 수 있으므로[2] 다음을 얻을 수 있다.

보조정리 3 모든 짝수 l에 대해서 $G(2^m, 2^k)$는 길이 l인 사이클을 가지며, 길이 l이고 서로소인 사이클 $\lfloor 2^m/l \rfloor$개를 패킹할 수 있다.

이제 l이 홀수이면서 $l \leq 2^k$인 경우만 남아 있다. 아래 정리는 어떤 l에 대해서

$G(2^m, 2^k)$가 길이 l인 사이클을 가지는가 하는 사이클 존재 문제를 고려한다. 이 정리에 의하면 남아 있는 경우에 $G(2^m, 2^k)$는 길이 l인 사이클을 가지지 않고 따라서 사이클 패킹도 할 수 없다는 것을 알 수 있다.

정리 1 $G(2^m, 2^k)$는 l이 짝수이고 $4 \le l \le 2^m$이거나, 혹은 l이 홀수이고 $2^k + 1 \le l \le 2^m$일 때 길이 l인 사이클을 가지며, 그 역도 성립한다.

증명 보조정리 1, 2, 3에 의해서 $G(2^m, 2^k)$는 길이가 $2^k - 1$ 이하인 홀수 길이의 사이클을 가지지 않음을 보이면 충분하다. 증명을 위해서 만약 그런 사이클 C를 가지고 있다고 가정하자. 일반성을 잃지 않고 C는 G_0, G_1, $\cdots$, G_t상의 정점을 지나지만 $G_{2^k - 1}$에 있는 어떤 정점도 지나지 않는다고 하자. C를 G_0에 프로젝트시켜서 C'을 얻는다. C를 G_0에 프로젝트 시킨다는 것은 C에 있는 정점 v_j^i는 v_j^0에 대응시키고, G_i에 있는 두 정점을 잇는 에지 $(v_j^i, v_{j'}^i)$는 $(v_j^0, v_{j'}^0)$에 대응키는 것이다. 이 때 G_i와 G_{i+1}을 잇는 에지 (v_j^i, v_j^{i+1})는 무시한다. 그러면 C'은 G_0에 있는 닫힌 워크(closed walk)가 된다. C'의 길이는 홀수가 되는데, 왜냐하면 C에서 G_i와 G_{i+1}을 잇는 에지 개수는 항상 짝수가 되기 때문이다. 길이가 홀수인 닫힌 워크가 G_0에 존재한다는 것은 곧 길이가 홀수인 사이클이 존재한다는 것을 의미한다. 따라서 $G(2^{m-k}, 2^k)$는 길이 $2^k - 1$ 이하인 홀수 사이클을 가진다. 이와 같은 방식으로 계속하면 결국 $G(2^{m'}, 2^k)$, $m' \le k$이 홀수 길이의 사이클을 가진다는 결론에 도달하게 되는데, 이것은 모순이다. □

위 정리에 의하면 $G(2^m, 2)$는 모든 길이의 사이클을 가지고 있는 pancyclic 그래프이며, $G(2^m, 4)$는 길이 4 이상인 모든 사이클을 가지고 있는 almost pancyclic 그래프가 된다. 이제 서로소인 사이클 패킹 문제를 고려하기로 한다. 만약 $G(2^m, 2^k)$가 길이 l인 사이클을 가진다면 정리 1의 조건을 만족할 것이고, l의 크기와 홀수인지 짝수인지에 따라 보조정리 1, 2, 3에 의해서 아래 정리가 증명된다.

정리 2 $G(2^m, 2^k)$가 길이 l인 사이클을 가지면 항상 $G(2^m, 2^k)$에 길이 l이고 서로소인 사이클 $\lfloor 2^m / l \rfloor$ 개를 패킹할 수 있다.

$G(2^m, 4)$의 사이클 패킹 문제에서 사이클의 길이가 짝수인 경우에 보조정리 3을 이용하지 않고도 $G(2^m, 4)$가 $2 \times 2^{m-1}$ 그리드 그래프을 스패닝 부그래프로 가진다는 사실을 이용하여 보일 수 있다.

$G(2^m, 2^k)$의 사이클 존재 문제나 패킹 문제에서 모두 크기가 1이거나 2^k인 에지만 사용하였다. 따라서 $G(2^m, 2^k)$는 서로소인 사이클 패킹보다 강한 어떤 사이클에 관한 성질

을 만족할 여지가 있다고 볼 수 있다. 그리고 이 절에서 제시한 증명은 정리 1과 정리 2에서 $G(cd^m, d)$, d가 짝수인 경우로 쉽게 확장할 수 있다.

4 그래프 invariant

4.1 그래프 채색

이 절에서는 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 정점이나 에지에 채색하고자 할 때 필요한 최소 색의 수, 즉 정점 색수와 에지 색수를 분석하고자 한다. 정점(혹은 에지)에 채색할 때 같은 색을 가진 정점(혹은 에지)의 수가 모두 서로 같거나, 그 차이가 1 이하이면 균형된 채색(balanced coloring)이라고 한다.

우선 $k \geq 2$인 경우 $G(2^m, 2^k)$의 정점 색수을 고려하여 보기로 한다. $m > k$이라고 가정한다. 그렇지 않은 경우에 $G(2^m, 2^k)$는 K_2와 동형이거나 길이가 2^m인 사이클과 동형이므로 정점 색수가 2인 이분 그래프가 됨을 쉽게 알 수 있다.

정리 3 $G(2^m, 2^k)$, $2 \leq k < m$의 정점 색수는 3이다. 그리고 균형된 채색이 가능하다.

증명 $G(2^m, 2^k)$는 길이가 2^k+1인 홀수 사이클을 가지고 있어서 이분 그래프가 아니므로 정점 색수는 3 이상이 된다. $G(2^m, 2^k)$를 3개의 색으로 정점에 균형된 채색을 할 수 있음을 보이고자 한다. 우선 $m \leq k$인 경우 $G(2^m, 2^k)$의 정점 v_j에 채색된 색 $c_m(v_j)$는 다음과 같다. m이 짝수일 경우에는 (2^m (mod 3)이 1이므로) $G(2^m, 2^k)$의 정점에 차례로 0, 1, 2를 배정한 다음 마지막 정점 v_{2^m-1}에 1을 배정하고, m이 홀수일 경우에는 (2^m (mod 3)이 2이므로) 차례로 0, 1, 2를 배정한 다음 마지막 정점 v_{2^m-2}와 v_{2^m-1}에 0, 1을 배정한다. 이것이 균형된 채색임은 자명하다.

$m > k$인 경우에 채색은 $G(2^m, 2^k)$의 재귀적 구조를 이용하고 정점을 v_j^i와 같은 형태로 표기하기로 한다. 먼저 k가 짝수인 경우에 $c_m(v_j^i)$를 다음과 같이 정의한다:

$$c_m(v_j^i) = (c_{m-k}(v_j) + i) \pmod 3, \quad k\text{는 짝수.}$$

정점 v_j^i는 같은 G_i에 속하면서 인접한 정점 $v_{j'}^i$와는 당연히 다른 색을 가진다. 그리고 $0 \leq i < 2^k - 1$일 때 v_j^i는 v_j^{i+1}과도 다른 색을 가진다. $v_j^{2^k-1}$이 v_{j+1}^0과도 다른 색을 가지는데, 이것은 2^k (mod 3)이 항상 1이므로 $c_m(v_j^{2^k-1}) = c_m(v_j^0)$이기 때문이다. 이것이 균형된 채색임을 보이기 위해서 G_0, G_1, G_2에서 사용한 색은 모두 같음을 관찰하자. 마찬가지 방식으로 3의 배수 i에 대해서 G_i, G_{i+1}, G_{i+2}에서 사용한 색의 수는 모두 같다.

결국 G_0, G_1, $\cdots$, G_{2^k-2}에서 사용한 색의 수는 같다. G_{2^k-1}은 이미 균형된 채색을 가지므로 증명이 완성된다.

이제 $m>k$이고 k가 홀수인 경우를 증명한다. 이 경우 $2^k \pmod 3$이 2가 됨에 유의한다. 채색 함수 $c_m(v_j^i)$를 다음과 같이 정의한다:

$$c_m(v_j^i) = \begin{cases} (c_{m-k}(v_j) + i) \pmod 3 & i < 2^k - 2, \\ (c_{m-k}(v_j) + 1) \pmod 3 & i = 2^k - 2, \\ c_{m-k}(v_j) & i = 2^k - 1. \end{cases}$$

v_j^i는 같은 G_i에 속하면서 인접한 정점 $v_{j'}^i$과는 다른 색을 가진다. 그리고 $0 \le i < 2^k - 1$일 때 v_j^i는 v_j^{i+1}과도 다른 색을 가진다. $v_j^{2^k-1}$이 v_{j+1}^0과도 다른 색을 가지는데, $c_m(v_j^{2^k-1}) = c_m(v_j^0)$이기 때문이다. 이 채색에서 G_0, G_1, $\cdots$, G_{2^k-3}에서 사용한 색의 수가 모두 같다. G_{2^k-2}는 정점의 수가 2^{m-k}이고 3가지 색으로 채색을 하므로, 한 색에 대해서 그 색을 가진 정점이 하나 많거나, 혹은 두 가지색에 대해서 각각 하나씩 정점이 많다. 한 가지 색을 더 가진 경우에 일반성을 잃지 않고 색 0을 가진 정점 수가 많다고 하자. 그러면 G_{2^k-1}에는 색 2를 가진 정점이 더 많을 것이고, 결국 색 0과 2를 가진 정점이 색 1을 가진 정점보다 하나 많게 되어 균형된 채색이 된다. G_{2^k-2}가 두 가지 색 0, 1을 가진 정점이 많다면, G_{2^k-1}에는 색 2, 0을 가진 정점이 많게 되어, 결국 색 0을 가진 정점이 하나 많은 균형된 채색이 된다. □

$G(2^m, 2^k)$, $2 \le k < m$는 정점 색수가 3이므로 tripartite 그래프가 된다. $G(2^m, 2)$의 정점 채색에 관해서는 $m \ge 2$임을 가정한다. $m = 1$이면 $G(2^m, 2)$는 K_2와 동형이어서 이분 그래프가 된다. 우선 $G(2^m, 2)$를 정점이 서로소인 완전 그래프로 분할하는 문제를 고려하기로 한다.

보조정리 4 $G(2^m, 2)$, $m \ge 2$는 정점이 서로소인 K_4로 분할할 수 있다.

증명 $m = 2$인 경우 $G(2^2, 2)$는 K_4와 동형이므로 당연하다. $G(2^{m-1}, 2)$가 K_4로 분할할 수 있다고 가정한다. $G(2^m, 2)$는 재귀적 구조를 가지므로, G_0와 G_1 각각을 K_4로 분할함으로써 $G(2^m, 2)$의 분할을 얻을 수 있다. □

정리 4 $G(2^m, 2)$, $m \ge 2$의 정점 색수는 4이다. 그리고 균형된 채색이 가능하다.

증명 보조정리 4는 $G(2^m, 2)$의 정점 색수가 4 이상임을 의미한다. 이제 $G(2^m, 2)$가 4개의 색으로 채색이 가능한지 살펴보기로 한다. $G(2^m, 2)$에 있는 정점 v_j^i에 채색된 색

$c_m(v_j^i)$를 다음과 같이 재귀적으로 나타낼 수 있다.

$$c_2(v_0)=0,\ \ c_2(v_1)=1,\ \ c_2(v_2)=2,\ \ c_2(v_3)=3;$$
$$c_m(v_j^i)=\begin{cases} c_{m-1}(v_j) & i=0, \\ c_{m-1}(v_{j-1}) & i=1. \end{cases}$$

같은 G_i에 속하면서 v_j^i와 인접한 정점 $v_{j'}^i$는 당연히 서로 다른 색을 가진다. v_j^0와 인접한 정점 v_j^1의 색은 $c_m(v_j^1)=c_m(v_{j-1}^0)$이므로 v_j^0의 색과는 다르며, 또 다른 인접한 정점 v_{j-1}^1의 색은 $c_m(v_{j-1}^1)=c_m(v_{j-2}^0)$이므로 역시 $c_m(v_j^0)$와는 다르다. G_0에서 v_j^0는 v_{j-1}^0과 v_{j-2}^0에 인접함에 유의한다. 위에서 제시한 채색에서 같은 색을 가지는 정점은 모두 $2^m/4$개로 균형된 채색임을 쉽게 알 수 있다. □

이제 재귀원형군 $G(2^m,2^k)$의 에지 채색을 고려하여 보기로 한다. Vizing의 정리에 의하면 단순 그래프의 에지 색수는 최대 분지수와 같거나 1만큼 더 크다고 알려져 있다. 아래 정리는 $G(2^m,2^k)$의 에지 색수가 분지수 $\delta_{m,k}$와 같음을 보여준다.

정리 5 $G(2^m,2^k)$의 에지 색수는 $G(2^m,2^k)$의 분지수 $\delta_{m,k}$와 같다. 그리고 균형된 채색이 가능하다.

증명 $G(2^m,2^k)$의 분지수가 1인 경우는 K_2와 동형이고, 분지수가 2인 경우는 길이가 2^m인 짝수 사이클로 이루어진 그래프이므로 에지 색수가 분지수와 같게 된다. 분지수가 2 이상인 경우 $G(2^m,2^k)$의 재귀적 구조를 이용하여 증명한다. $G(2^{m-k},2^k)$의 에지 색수가 분지수와 같다고 가정하자. $G(2^m,2^k)$는 G_0, G_1, $\cdots$, G_{2^k-1}에 크기가 1인 에지의 집합 X를 추가하여 얻어지는데, X는 길이 2^m인 사이클을 이룬다. X에 속한 에지를 2개의 색으로 번갈아 채색하고, 나머지 에지들의 색은 G_i의 색을 그대로 이용함으로써 $G(2^m,2^k)$의 에지 채색을 얻을 수 있다. $G(2^m,2^k)$의 에지를 채색할 때 G_i에서 사용한 색보다 2개를 더 사용하였고, 분지수도 2가 늘어나므로 분지수와 같은 수의 색으로 채색이 된다. 이 채색은 당연히 균형된 채색이 된다. □

위의 정리에서 같은 색을 가진 에지의 집합은 1-팩터가 된다. 여기서 1-팩터라는 것은 1-정규 스패닝 부그래프를 말한다. 따라서 위의 정리는 곧 $G(2^m,2^k)$가 1-팩터로 분할됨을 의미한다. 사실 균형된 에지 채색이나 1-팩터로 분할하는 것은 $G(2^m,2^k)$를 에지가 서로소인 $\lfloor \delta_{m,k}/2 \rfloor$개의 해밀톤 사이클로 분할할 수 있다는 사실로부터 유도할 수 있다.

4.2 최대 클릭

이 절에서는 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 최대 클릭의 크기, 즉 클릭수를 분석하고자 한다. $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 2$는 정리 1에 의하면 길이 3인 사이클을 가지지 않으므로 클릭수가 2가 된다. $G(2^m, 2)$는 보조정리 4에 의해서 정점이 서로소인 K_4로 분할할 수 있으므로 클릭수가 4 이상이며, 정리 4에 의해서 정점 색수가 4이므로 K_5를 스패닝 부그래프로 가지지 않아서 클릭수가 4 이하이다. 따라서 다음을 얻을 수 있다.

정리 6 $G(2^m, 2^k)$, $m \geq 2$, $k \geq 2$의 클릭수는 2이다. $G(2^m, 2)$, $m \geq 2$의 클릭수는 4이다.

4.3 독립 집합과 정점 커버

재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 독립수와 정점 커버수를 고려한다. 먼저 $k \geq 2$ 이상인 경우를 생각하기로 한다. $m \leq k$이면 $G(2^m, 2^k)$의 독립수는 당연히 $2^m/2$가 되므로 $m > k$이라고 가정한다. 아래 보조정리 5에서 $m \leq 2k$인 조건하에서 독립수를 구한 다음 이를 이용하여 일반적인 경우에 독립수를 찾고자 한다.

보조정리 5 $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 2$, $k < m \leq 2k$의 독립수는 $(1/2)(1-1/2^k)2^m$이다.

증명 $G(2^m, 2^k)$의 재귀적 구조를 이용하여 증명하기로 한다. $G(2^m, 2^k)$의 정점을 v_j^i와 같은 형태로 표현하기로 한다. $k < m \leq 2k$인 경우에 각각의 G_i는 정점 수 2^{m-k}가 2와 같으면 K_2와 동형이고, 2보다 크면 길이가 2^{m-k}인 사이클 그래프와 동형이다. G_i에 있는 정점 v_j^i에 대해서 j가 짝수이면 짝수 정점, 홀수이면 홀수 정점이라고 부르기로 한다.

먼저 크기가 $(1/2)(1-1/2^k)2^m$인 독립 집합 S을 찾음으로써 독립수가 그 이상임을 보인다. G_i, $0 \leq i < 2^k - 1$에서 i가 짝수이면 모든 짝수 정점을, 홀수 이면 모든 홀수 정점을 S에 포함시키자. G_{2^k-1}에 있는 정점은 S에 포함시키지 않음에 주의한다. S에 속한 한 정점 v_j^i는 당연히 $S \cap G_i$에 있는 정점과는 인접하지 않다. 그리고 정의에 의하여 v_j^{i-1}, v_j^{i+1}은 S에 속하지 않으므로 S는 독립 집합이 된다. S의 크기는 $2^k - 1$개의 G_i에서 각각 $2^{m-k}/2$개의 정점을 포함하므로 $(1/2)(1-1/2^k)2^m$이 된다.

이제 앞에서 보인 S가 최대 독립 집합임을 보이기 위해서 크기가 S보다 큰 독립 집합 S'이 존재한다고 가정하자. $S_i' = S' \cap V(G_i)$이라고 하자. S'의 크기가 S보다 크므로 모든 S_i'는 정점을 하나 이상 가진다. 또한 최소한 한 S_i'의 크기는 최대, 즉 크기가 $2^{m-k}/2$가 된다: 만약 그렇지 않다면 S'의 크기는 $2^k(2^{m-k}/2-1) = (1/2)(1-1/2^{m-k-1})2^m$이 되어 S의 크기보다 작아지게 된다. 크기가 최대인 S_i'는 G_i

에 있는 모든 짝수 정점이나 혹은 홀수 정점의 집합이다. 그리고 G_0에 있는 짝수 정점과 G_{2^k-1}에 있는 홀수 정점이 서로 인접하므로 모든 S_i'의 크기가 최대일 수는 없다.

일반성을 잃지 않고 S'은 크기가 최대인 S_i'의 개수가 최대라고 가정한다. 또한 S_0'의 크기는 최대이고 G_0에 있는 모든 짝수 정점을 포함한다고 가정한다. 그러면 t가 존재하여 모든 $i < t$에 대해서 S_i'의 크기는 최대이며 S_t'의 크기는 최대가 아니다. 이 때 $t \neq 2^k - 1$이다: 만약 그렇지 않다면 S_{2^k-2}'는 모든 짝수 정점을 포함하므로 S_{2^k-1}'에는 홀수 정점만 포함될 수 있으나, G_{2^k-1}에 있는 모든 홀수 정점은 G_0에 있는 짝수 정점에 인접하므로 $S_{2^k-1}' = \emptyset$이 되어 모순된다. 그리고 t가 짝수(혹은 홀수)이면 S_t'에 있는 정점은 모두 짝수(혹은 홀수) 정점이 된다. 만약 그렇지 않다면 S_{t-1}'에 있는 한 정점과 인접하게 되어 S'이 독립 집합이라는 사실에 모순된다. t을 짝수라고 가정한다. 홀수인 경우에도 마찬가지 방식으로 증명할 수 있다.

S_{t+1}'의 크기는 최대가 아니다: 만약 그렇지 않다면, S_{t+1}'이 홀수 정점만을 포함할 것이므로 S_t'에 짝수 정점을 추가하여 S'의 크기를 증가시킬 수 있다. 또한 S_{t+1}'은 짝수 정점을 하나 이상 포함한다: 그렇지 않다면, S'에 G_t에 있는 모든 짝수 정점을 추가하여 S'의 크기를 늘일 수 있다. 이제 S_{t+1}'에 속하는 짝수 정점 v_j^{t+1}을 S'에서 제거하고 v_j^t를 추가한다. 여전히 S'은 독립 집합으로 남아 있다. 이러한 과정을 반복하여 S_{t+1}'에 속한 정점을 하나씩 줄이면서 S_t'에 속한 정점을 하나씩 늘여서 S_t'의 크기가 최대가 되는 S'을 얻는다. S'의 크기가 S보다 크기 때문에 S_t'의 크기가 최대가 될 때까지 이 과정을 반복할 수 있다. 이러한 과정을 거쳐 새로 정의한 독립 집합을 S''이라고 하면 S''은 S'과 정점의 수는 같지만, 크기가 최대인 $S_i'' = S'' \cap V(G_i)$의 개수가 더 많으므로 S'의 정의에 모순된다. 따라서 이 정리의 증명이 완성된다. □

정리 7 $G(2^m, 2^k)$, $2 \le k < m$의 독립수는 $(1/2)(1 - 1/2^k)2^m$이다.

증명 $m \le 2k$인 경우는 위의 보조정리 5에 의해서 성립한다. $m > 2k$인 경우는 $G(2^m, 2^k)$의 재귀적 구조을 이용하여 증명하기로 한다. G_0는 크기가 $(1/2)(1 - 1/2^k)2^{m-k}$인 독립 집합 S_0을 가진다. $G(2^m, 2^k)$의 정점 부분 집합 S를 다음과 같이 정의하고 이것이 최대 독립 집합임을 보이고자 한다:

$$S = \{v_{j+i}^i \mid v_j^0 \in S_0,\ 0 \le i < 2^k\}.$$

S가 독립 집합임을 먼저 보인다. S에 속한 두 정점 v_{j+i}^i와 $v_{j'+i}^i$는 서로 인접하지 않다: 그렇지 않으면 v_j^0와 $v_{j'}^0$가 서로 인접하게 되는데 S_0가 G_0의 독립 집합임에 모순이

다. S에 속한 임의의 정점 v^i_{j+i}, $1 \le i < 2^k$에 대해서 v^{i-1}_{j+i}은 S에 속하지 않는다: 만약 그렇지 않다면 S_0에 v^0_j과 v^0_{j+1}이 동시에 속하게 되어 모순이다. 그리고 정점 $v^{2^k-1}_{j+2^k-1}$이 S에 속하면 $v^0_{j+2^k}$는 S에 속하지 않는다: 그렇지 않다면 v^0_j와 $v^0_{j+2^k}$가 동시에 S_0에 속하게 되어 모순된다. 따라서 S는 크기가 $(1/2)(1-1/2^k)2^m$인 독립 집합이다. 이제 S가 최대 독립 집합임을 보이기 위해서 S보다 크기가 큰 독립 집합 S'이 존재한다고 하자. $S' \cap V(G_i)$는 당연히 G_i의 독립 집합이어야 하므로 $S' \cap V(G_i)$의 크기는 모두 $(1/2)(1-1/2^k)2^{m-k}$ 이하이다. 이것은 S'의 크기가 S보다 크다는 사실에 모순된다. □

따름정리 1 $G(2^m, 2^k)$, $2 \le k < m$의 정점 커버수는 $(1/2)(1+1/2^k)2^m$이다.

$G(2^m, 2)$, $m \ge 2$의 독립수를 고려하여 보자. 보조정리 4에 의해서 $G(2^m, 2)$는 정점이 서로소인 K_4로 분할이 가능하므로 독립수는 $2^m/4$ 이하이다. 그리고 정리 4에 의하여 $G(2^m, 2)$는 4개의 색으로 균형된 정점 채색이 가능하므로, 독립수는 $2^m/4$ 이상이므로 다음을 얻을 수 있다. 같은 색으로 채색된 정점은 독립 집합을 이룸에 유의한다.

정리 8 $G(2^m, 2)$, $m \ge 2$의 독립수는 $(1/4)2^m$이다.

따름정리 2 $G(2^m, 2)$, $m \ge 2$의 정점 커버수는 $(3/4)2^m$이다.

5 결론

재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$를 그래프 이론적 관점에서 정점이 서로소인 사이클과 그래프 invariant에 관한 위상 특성을 고찰하였다. $G(2^m, 2^k)$는 모든 짝수 l과 크기가 2^k+1 이상인 모든 홀수 l에 대해서 길이 l인 사이클을 가지며, 같은 조건하에서 가능한 최대 개수의 정점이 서로소이고 길이가 l인 사이클을 패킹할 수 있음을 보였다. 그리고 유용한 그래프 invariant인 정점 색수 및 에지 색수, 클릭수, 독립수 및 정점 커버수를 분석하였다. 이 연구 결과를 $G(2^m, 2^k)$를 포함하는 재귀원형군 $G(cd^m, d)$로 확장하는 것은 연구 과제로 남아 있다. 더 나아가서는 해밀톤 사이클의 개수를 구하는 것이나 최소 dominating 집합을 구하는 것 등도 흥미있는 연구 문제이다.

참고문헌

[1] 박 정흠, 좌 경룡, "재귀원형군의 위상 특성: 서로소인 경로," *한국정보과학회 논문지*

26(8), 1999.

[2] 신 찬수, 박 종대, 박 정흠, 좌 경룡, "2차원 그리드 그래프의 사이클 분할," manuscript.

[3] N. Alon, "Disjoint directed cycles," *J. Combin. Theory, Ser. B* 68, pp. 167-178, 1996.

[4] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, 5th printing, American Elsevier Publishing Co., Inc., 1976.

[5] C. C. Chen and N. F. Quimpo, "On strongly hamiltonian abelian group graphs," *Lecture Notes in Mathematics* 884 (Springer, Berlin), Australian Conference on Combinatorial Mathematics, pp. 23-34, 1980.

[6] M. Hamdi, "Topological properties of the directional hypercube," *Information Processing Letters* 53, pp. 277-286, 1995.

[7] A. Kavianpour and K. H. Kim, "A comparative evaluation of four basic system-level diagnosis strategies for hypercubes," *IEEE Trans. Reliability* 41(1), pp. 26-37, 1992.

[8] C. Micheneau, "Disjoint hamiltonian cycles in recursive circulant graphs," *Information Processing Letters* 61, pp. 259-264, 1997.

[9] J.-H. Park, "Hamiltonian decomposition of recursive circulants," in Proc. *International Symposium on Algorithms and Computation ISAAC'98*, Taejon, Korea, 1998 (to appear).

[10] J.-H. Park and K.-Y. Chwa, "Recursive circulant: a new topology for multicomputer networks," in Proc. *International Symposium on Parallel Architectures, Algorithms and Networks ISPAN'94*, Kanazawa, Japan, pp. 73-80, 1994.

[11] D. A. Reed and R. M. Fujimoto, *Multicomputer Networks: Message-Based Parallel Processing*, The MIT Press, 1987.

[12] Y. Saad and M. H. Schultz, "Topological properties of hypercubes," *IEEE Trans. Comput.* 37, pp. 867-872, 1988.