

재귀원형군의 위상 특성: 서로소인 경로*

박 정흠¹, 좌 경룡²

¹가톨릭대학교 컴퓨터공학부
420-743 경기도 부천시 원미구 역곡 2동 산 43-1
jhpark@tcs.cuk.ac.kr
전화 (032) 340-3366, 팩스 (032) 340-3361

²한국과학기술원 전산학과
305-701 대전시 유성구 구성동 373-1
kychwa@jupiter.kaist.ac.kr
전화 (042) 869-3513, 팩스 (042) 869-3510

Topological Properties of Recursive Circulants: Disjoint Paths

Jung-Heum Park¹ and Kyung-Yong Chwa²

¹School of Computer Science and Engineering
Catholic University of Korea
Yokkok 2-dong 43-1, Wonmi-gu, Puchon City, Kyonggi-do 420-743
jhpark@tcs.cuk.ac.kr
TEL (032) 340-3366, FAX (032) 340-3361

²Department of Computer Science
Korea Advanced Institute of Science and Technology
Kusong-dong 373-1, Yusong-gu, Taejon 305-701
kychwa@jupiter.kaist.ac.kr
TEL (042) 869-3513, FAX (042) 869-3510

* 이 논문은 1997년 학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.

재귀원형군의 위상 특성: 서로소인 경로

Topological Properties of Recursive Circulants: Disjoint Paths

요약

이 논문은 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 를 그래프 이론적 관점에서 고찰하고 정점이 서로소인 경로에 관한 위상 특성을 제시한다. 재귀원형군은 [9]에서 제안된 다중 컴퓨터의 연결망 구조이다. 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 의 서로 다른 두 노드 v 와 w 를 잇는 연결도 $\kappa(G)$ 개의 서로소인 경로의 길이가 두 노드 사이의 거리 $d(v, w)$ 나 혹은 $G(2^m, 2^k)$ 의 지름 $\text{dia}(G)$ 에 비해서 얼마나 늘어나는지를 고려한다. 서로소인 경로를 재귀적으로 설계하는데, 그 길이는 $k \geq 2$ 일 때 $d(v, w) + 2^k - 1$ 과 $\text{dia}(G) + 2^{k-1}$ 의 최솟값 이하이고, $k = 1$ 일 때 $d(v, w) + 3$ 과 $\text{dia}(G) + 2$ 의 최솟값 이하이다. 이 연구는 $G(2^m, 2^k)$ 의 고장 감내 라우팅, 고장 지름이나 persistence의 분석에 이용할 수 있다.

Abstract

In this paper, we investigate recursive circulant $G(2^m, 2^k)$ from the graph theory point of view and present topological properties concerned with node-disjoint paths. Recursive circulant is an interconnection structure for multicomputer networks proposed in [9]. We consider the length increments of $\kappa(G)$ disjoint paths joining arbitrary two nodes v and w in $G(2^m, 2^k)$ compared with distance $d(v, w)$ between the two nodes and diameter $\text{dia}(G)$ of $G(2^m, 2^k)$, where $\kappa(G)$ is the connectivity of $G(2^m, 2^k)$. We recursively construct disjoint paths of length less than or equal to the minimum of $d(v, w) + 2^k - 1$ and $\text{dia}(G) + 2^{k-1}$ for $k \geq 2$ and the minimum of $d(v, w) + 3$ and $\text{dia}(G) + 2$ for $k = 1$. This work can be applied to fault-tolerant routing and analysis of fault diameter and persistence of $G(2^m, 2^k)$.

1 서론

다중 컴퓨터 네트워크에서 고장 감내에 관한 공통적인 개념은 역시 그 연결망 구조의 연결도일 것이다. 연결도가 $\kappa(G)$ 인 연결망은 임의의 $\kappa(G)-1$ 개 혹은 그 이하의 노드에 고장이 발생하더라도 연결망이 분리되지 않는다는 보장이 있다. 재귀원형군 $G(N, d)$ 의 연결도 $\kappa(G)$ 는 분지수 $\delta(G)$ 와 같다고 알려져 있다[3]. Menger 정리에 의하면 연결도가 $\kappa(G)$ 인 그래프는 임의의 두 노드 사이에 $\kappa(G)$ 개의 (양끝 정점을 제외하고) 정점이 서로소인 경로가 존재한다. 이 논문은 임의의 두 노드 사이에 얼마나 길이가 짧은 $\kappa(G)$ 개의 서로소인 경로가 존재하느냐는 것에 관심이 있다.

두 노드 사이에 있는 $\kappa(G)$ 개의 서로소인 경로의 길이는 각 경로 길이의 최댓값으로 정의한다. 서로소인 경로의 길이는 물론 두 노드 v, w 사이의 거리 $d(v, w)$ 보다 짧을 수는 없다. 또한 모든 노드 쌍에 대한 서로소인 경로의 길이를 생각하면 그것은 그래프의 지름 $\text{dia}(G)$ 보다 작아질 수 없다. 따라서 다음과 같이 서로소인 경로의 길이가 두 노드 사이의 거리나 혹은 지름에 비해서 얼마나 커지는가 하는 문제를 고려한다.

- (a) $G(2^m, 2^k)$ 에서 임의의 서로 다른 두 노드 v, w 를 잇는 길이가 $d(v, w) + \Delta_1$ 이하인 $\kappa(G)$ 개의 서로소인 경로가 존재하기 위한 Δ_1 값은 얼마인가?
- (b) $G(2^m, 2^k)$ 에서 임의의 서로 다른 두 노드를 잇는 길이가 $\text{dia}(G) + \Delta_2$ 이하인 $\kappa(G)$ 개의 서로소인 경로가 존재하기 위한 Δ_2 값은 얼마인가?

이 논문에서는 $k \geq 2$ 일 때 $G(2^m, 2^k)$ 에서 $\Delta_1 = 2^k - 1$ 이고 동시에 $\Delta_2 = 2^{k-1}$ 인 서로소인 경로를 재귀적으로 설계한다. 그리고 $k = 1$ 인 $G(2^m, 2^k)$, 즉 $G(2^m, 2)$ 에서는 $\Delta_1 = 3$ 이고 $\Delta_2 = 2$ 인 서로소인 경로를 제시한다. 제시한 서로소인 경로는 항상 최단 경로를 포함하고 있다.

이 문제는 다중컴퓨터 네트워크의 고장 감내 라우팅 등 고장 감내 기술 개발에 응용할 수 있다. 연결망에서 연결도가 $\kappa(G)$ 라는 것은 임의의 $\kappa(G) - 1$ 개 혹은 그 이하의 노드에 고장이 발생하더라도 두 노드를 잇는 경로가 존재한다는 것만 보장하지만, 위 문제를 이용한 라우팅에서는 경로가 존재한다는 것뿐만 아니라 그 경로의 길이가 두 노드 사이의 거리와 Δ_1 의 합이나 혹은 지름과 Δ_2 의 합으로 제한된다는 것을 말하는 것이므로 라우팅의 효율성이 보장된다고 볼 수 있다.

또한 이 문제를 이용하여 고장 지름과 persistence를 분석할 수 있다. 그래프 G 의 고장 지름은 G 에서 임의의 $\kappa(G) - 1$ 개 이하의 정점을 삭제하고 남은 그래프들의 최대 지름을 말한다. persistence는 G 의 지름을 늘이기 위해서 삭제하여야 할 정점의 최소 개수이다. 아래에 서로소인 경로의 길이와 고장 지름, persistence와의 관계가 나타나 있다. 일반적으로

로 이 명제의 역은 성립하지 않는다고 알려져 있다.

성질 1 (a) 그래프 G 에서 임의의 두 노드 사이에 길이가 f 이하인 $\kappa(G)$ 개의 서로소인 경로가 존재하면, 고장 지름 $\text{fd}(G) \leq f$ 이다[8].

(b) 그래프 G 에서 임의의 인접하지 않은 두 노드 사이에 길이가 $\text{dia}(G)$ 이하인 서로소인 경로가 g 개 이상 존재하면, persistence $\text{per}(G) \geq g$ 이다[4,6].

그 외 재귀원형군의 위상 특성으로 최단 경로[9], 서로소인 사이클과 그래프 invariant[2] 등에 대하여 연구되어 있다. 최단 경로 성질은 최단 경로 라우팅에 이용할 수 있으며, 서로소인 사이클을 병렬 작업 할당이나 순차적 고장 진단도 분석에 이용할 수 있다. 다른 연결망 구조의 위상 특성에 대한 연구로는 [7,11] 등이 있다.

앞으로 따로 말하지 않으면 사칙연산은 모두 모듈로 2^m 연산을 가정한다. 여기서 정의하지 않은 그래프 이론적인 용어는 [5]를 따른다. 이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 재귀원형군에 대한 기본적인 성질을 2절에서 살펴본다. 3절과 4절에서 각각 $k \geq 2$ 인 경우와 $k = 1$ 인 경우에 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 의 길이가 제한된 서로소인 경로를 설계한다. 마지막으로 5절에서 이 논문을 요약하고 향후 연구 과제를 살펴본다.

2 재귀원형군의 성질

재귀원형군의 정의와 재귀적 구조, 그리고 기본적인 성질은 [2,9]에 잘 나타나 있다. 이 절에서는 논문의 전개에 필요하면서 [2]에서 기술되지 않은 성질만을 소개하기로 한다. $G(2^m, 2^k)$ 의 재귀적 구조에서 G_i 는 $G(2^{m-k}, 2^k)$ 와 동형이므로 $m \geq 2k$ 일 때 G_i 도 역시 재귀적 구조를 가진다. 즉, G_i 는 $G(2^{m-2k}, 2^k)$ 와 동형인 $G_{i,0}, G_{i,1}, \dots, G_{i,2^k-1}$ 에 크기가 2^k 인 에지가 추가되어 있다고 볼 수 있다. G_i 에 속한 모든 정점의 인덱스에 i 를 빼고 2^k 로 나누면 인덱스는 0부터 순차적인 정수를 가지게 되는데, 그 인덱스를 2^k 로 나누 나머지가 i' 인 정점은 $G_{i,i'}$ 에 속한다. 다시 말하면 $G_{i,i'}$ 의 정점 집합 $V_{i,i'}$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V_{i,i'} = \{v_j \mid j \equiv i \pmod{2^k} \text{ 이고 } (j-i) / 2^k \equiv i' \pmod{2^k}\}$$

따라서 $G(2^m, 2^k)$ 의 정점이 어떤 $G_{i,i'}$ 에 속해 있는지를 나타내고자 할 때는 $v_j^{i,i'}$, $0 \leq i < 2^k$, $0 \leq i' < 2^k$, $0 \leq j < 2^{m-2k}$ 와 같이 표기한다.

$G(2^m, 2^k)$ 의 최단 경로 성질은 재귀적 구조에서 잘 이해할 수 있다. 아래 성질은 $G(2^m, 2^k)$ 를 포함하는 부류인 $G(cd^m, d)$ 에서도 성립한다.

성질 2 (a) 두 정점 v_0^0 와 v_j^0 사이의 모든 최단 경로는 G_0 에 속한 정점만을 지난다. 따라

서 $G(2^m, 2^k)$ 상에서 v_0^j 와 v_j^j 사이의 거리 $d(v_0^j, v_j^j)$ 는 G_0 상에서 두 정점간의 거리와 같다.

(b) v_0^j 와 v_j^j 사이에는 $i < 2^{k-1}$ 이면 v_j^j 를, $i > 2^{k-1}$ 이면 v_{j+1}^j 을 지나는 최단 경로가 존재한다. $j = 2^{k-1}$ 일 경우에는 v_j^j 나 혹은 v_{j+1}^j 을 지나는 최단 경로가 존재한다. 이 경우 $d(v_0^j, v_j^j)$ 가 $d(v_0^j, v_{j+1}^j)$ 보다 작으면 v_j^j 를, 크면 v_{j+1}^j 을 지나는 최단 경로가 존재하고, 같은 경우는 각각을 지나는 최단 경로가 존재한다.

$G(2^m, 2^k)$ 의 지름 $\text{dia}_{m,k}$ 에 대해서 다음이 성립한다. $m \geq 2k$ 일 때 아래 성질을 살펴보면, $\text{dia}_{m,k} = \text{dia}_{m-k,k} + 2^{k-1}$ 이면 $\text{dia}_{m-k,k} = \text{dia}_{m-2k,k} + 2^{k-1} - 1$ 이 성립하고 $\text{dia}_{m,k} = \text{dia}_{m-k,k} + 2^{k-1} - 1$ 이면 $\text{dia}_{m-k,k} = \text{dia}_{m-2k,k} + 2^{k-1}$ 이 성립함을 알 수 있다.

성질 3 (a) $\text{dia}_{m,k} = \text{dia}_{m-2k,k} + 2^k - 1$, $m > 2k$; $\text{dia}_{m,k} = \text{dia}_{m-k,k} + 2^{k-1} - 1$, $k < m \leq 2k$; $\text{dia}_{m,k} = 2^{m-1}$, $m \leq k$

(b) $\text{dia}_{m-k,k} + 2^{k-1} - 1 \leq \text{dia}_{m,k} \leq \text{dia}_{m-k,k} + 2^{k-1}$, $m \geq k$

(c) $\text{dia}_{m,k} = \begin{cases} \lceil \frac{2^k-1}{2} \lfloor \frac{m}{k} \rfloor \rceil & k \text{가 } m \text{을 나눌 때;} \\ \lfloor \frac{2^k-1}{2} \lfloor \frac{m}{k} \rfloor \rfloor + 2^{m \pmod k - 1} & \text{그렇지 않을 때.} \end{cases}$

3 $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 2$ 의 서로소인 경로

이 절에서는 $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 2$ 에서 서로 다른 두 노드 v, w 를 잇는 길이가 $d(v, w) + \Delta_1$ 과 $\text{dia}(G) + \Delta_2$ 로 제한된 $\kappa(G)$ 개의 서로소인 경로를 재귀적으로 설계한다. 재귀원 형군에서 $\kappa(G) = \delta(G)$ 이므로 서로소인 경로가 $\kappa(G)$ 개라는 것이나 $\delta(G)$ 개라는 것은 같은 말이다. 앞으로 서로소인 경로의 수를 말할 때 분지수를 기준으로 말하기로 한다. $G(2^m, 2^k)$ 에서 임의의 두 노드 v, w 사이에 아래의 다섯 조건을 모두 만족하는 서로소인 경로를 제시한다. 조건 (a), (b)는 두 노드 사이의 거리와 관련이 있고, 조건 (c), (d), (e)는 지름과 관련이 있다.

(a) 모든 서로소인 경로의 길이는 $d(v, w) + 2^k - 1$ 이하이다.

(b) 최소한 한 경로는 길이가 $d(v, w)$ 인 최단 경로이다.

(c) 모든 경로의 길이는 $\text{dia}(G) + 2^{k-1}$ 이하이다.

(d) 최소한 $\lfloor \delta(G)/2 \rfloor$ 개의 경로의 길이는 $\text{dia}(G)$ 이하이다.

(e) 최소한 $\lfloor 3\delta(G)/4 \rfloor$ 개의 경로의 길이는 $\text{dia}(G) + 1$ 이하이다.

앞으로 $\delta(G)$ 는 $m > k$ 일 때 $\delta(G_i) + 2$ 이고 $m > 2k$ 일 때 $\delta(G_{i,j}) + 4$ 임을 기억한다. $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 2$ 에서 G_0 에 속하지 않으면서 v_0^0 에 인접한 정점 $v_0^1, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}$ 이 각각 G_1, G_{2^k-1} 에 속한다. 그리고 G_0 상의 두 노드 $v_{s_1}^0$ 와 $v_{s_2}^0$ 를 잇는 경로 $P = v_{s_1}^0, v_{s_2}^0, \dots, v_{s_i}^0$ 가 있을 때, G_i 상에서 같은 인덱스를 가진 노드로 이루어진 경로 $v_{s_1}^i, v_{s_2}^i, \dots, v_{s_i}^i$ 를 G_i 에 있는 P 의 사촌 경로라고 말한다. P 가 $G_{0,0}$ 에 속할 때 $G_{i,j}$ 에 있는 사촌 경로도 마찬가지로 정의한다.

3.1 $m \leq 2k$ 인 경우

먼저 $G(2^m, 2^k)$, $m \leq k$ 인 경우를 고려한다. $G(2^m, 2^k)$ 은 $m = 1$ 일 때 완전 그래프 K_2 와 동형이므로 서로 다른 노드간의 경로가 하나 존재한다. $1 < m \leq k$ 일 때는 $G(2^m, 2^k)$ 가 길이 2^m 인 사이클 그래프와 동형이다. $G(2^m, 2^k)$ 가 노드 대칭적이므로 일반성을 잃지 않고 $v = v_0$ 이고 $w = v_j$, $1 \leq j < 2^m$ 라고 생각하면, 두 정점간에서는 길이 j 인 경로 $P_1 = v_0, v_1, \dots, v_j$ 와 길이 $2^m - j$ 인 경로 $P_2 = v_0, v_{2^m-1}, v_{2^m-2}, \dots, v_j$ 가 존재한다. 이 경로가 위의 조건을 만족함을 아래 보조정리 1에서 보인다.

보조정리 1 $G(2^m, 2^k)$, $m \leq k$ 일 때 설계한 서로소인 경로는 위의 다섯 조건을 모두 만족한다. 더구나 경로의 길이는 $d(v, w) + 2^k - 2$ 이하이고 또한 $\text{dia}(G) + 2^{k-1} - 1$ 이하이어서 조건 (a)와 (c)보다 강한 조건을 만족한다.

증명 $m = 1$ 인 경우는 자명하다. $1 < m \leq k$ 인 경우, 경로의 길이가 두 노드 사이의 거리나 지름에 비해서 최대로 커질 때는 v_0 와 v_1 간의 경로인 경우인데, 거리에 비해서는 $2^m - 2$ 만큼 크고 지름에 비해서는 $2^{m-1} - 1$ 만큼 더 크다. 분지수가 2임을 염두에 두고 위의 조건을 살펴보면 모두 만족함을 알 수 있다. \square

이제 $k < m \leq 2k$ 인 $G(2^m, 2^k)$ 를 고려한다. 이 경우 $\delta(G)$ 는 3 혹은 4이다. 재귀적 구조를 생각하면 $G(2^m, 2^k)$ 는 $G(2^{m-k}, 2^k)$ 와 동형인 $G_0, G_1, \dots, G_{2^k-1}$ 로 구성되어 있는데, $m - k \leq k$ 이므로 G_i 는 K_2 와 동형이거나 길이 2^{m-k} 인 사이클 그래프와 동형이다. 그리고 성질 3에 의해서 $\text{dia}(G) \geq \text{dia}(G_i) + 2^{k-1} - 1$ 이 된다(사실 이 경우는 등식이 성립한다). 일반성을 잃지 않고 $v = v_0^0$ 임을 가정한다. w 가 어떤 G_i 에 속하느냐에 따라 아래와 같이 3가지 경우로 나누어 서로소인 경로를 설계하기로 한다.

경우 1 $w = v_j^0$, $j \neq 0$ 일 때

일단 v_0^0 에서 v_j^0 까지 서로소인 경로 $\delta(G) - 2$ 개를 G_0 상에서 재귀적으로 정의한다. 나머지 경로 두 개를 다음과 정의한다. v_0^0 에서 v_0^1 을 거쳐 G_1 상에서 v_j^1 까지 최단 경로를 지나 다시 v_j^0 를 잇는 경로를 P_1 이라고 한다(그림 1 참조). P_1 과 유사하게 v_0^0 에서 시작하여 $G_{2^{k-1}}$ 상의 정점 $v_{2^{m-k-1}}^{2^{k-1}}$ 을 거쳐 최단 경로로 $v_{j-1}^{2^{k-1}}$ 을 지난 다음 v_j^0 에 도달하는 경로를 P_2 라고 한다. 제시한 경로가 서로소라는 것인 자명하다.

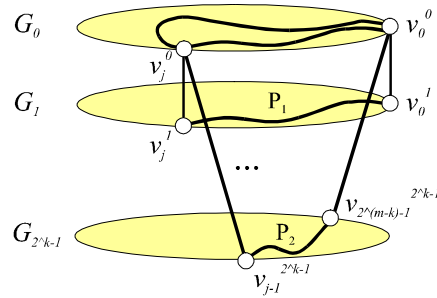


그림 1 경우 1의 설명

보조정리 2 경우 1에서 설계한 서로소인 경로는 위의 다섯 조건을 모두 만족한다.

증명 P_1 의 길이는 $1 + d(v_0^0, v_j^0) + 1$ 인데, $d(v_0^0, v_j^0) = d(v_0^1, v_j^1)$ 이므로 결국 $d(v_0^0, v_j^0) + 2$ 가 된다. P_2 의 길이도 마찬가지로 $1 + d(v_{2^{m-k-1}}^{2^{k-1}}, v_{j-1}^{2^{k-1}}) + 1 = d(v_{2^{m-k-1}}^{2^{k-1}}, v_{j-1}^{2^{k-1}}) + 2 = d(v_0^0, v_j^0) + 2$ 가 된다. $k \geq 2$ 이므로 재귀적으로 설계한 경로와 함께 P_1, P_2 도 조건 (a)를 만족하게 되고, 재귀적으로 설계한 경로에 최단 경로가 포함되어 조건 (b)도 만족한다. 성질 2에 의해서 G_0 상에서 v_0^0 에서 v_j^0 까지의 거리는 $G(2^m, 2^k)$ 상에서의 거리 $d(v_0^0, v_j^0)$ 와 같음에 유의한다.

이제 지름에 관한 나머지 세 조건을 만족하는지를 보이려고 한다. 보조정리 1에 의해서 재귀적으로 설계한 경로의 길이는 모두 $\text{dia}(G_0) + 2^{k-1} - 1 \leq \text{dia}(G)$ 이하임이 성립한다. 나머지 두 경로 P_1, P_2 의 길이는 결국 $\text{dia}(G_0) + 2 \leq \text{dia}(G) - (2^{k-1} - 1) + 2$ 이하가 되는데, $k \geq 3$ 이면 $\text{dia}(G)$ 이하가 되고 $k=2$ 이면 $\text{dia}(G) + 1$ 이하가 된다. $k \geq 3$ 인 경우는 모든 경로의 길이가 모두 $\text{dia}(G)$ 이하가 되므로 지름에 관한 세 조건이 모두 성립한다. $k=2$ 인 경우는 모든 경로의 길이가 $\text{dia}(G) + 1$ 이하가 되므로 조건 (c), (e)를 만족한다. $\delta(G) = 3$ 인 경우는 최단 경로가 포함되어 있으므로 조건 (d)를 만족하고, $\delta(G) = 4$ 인 경우는 재귀적으로 설계한 경로 둘의 길이가 모두 $\text{dia}(G)$ 이하이므로 역시 조건 (d)를 만족한다. \square

경우 2 $w = v_j^i$, $i \neq 0$, $j \neq 0$ 일 때

$1 \leq i \leq 2^{k-1}$ 임을 가정한다. 이 가정이 일반성을 잃지 않는 것은 $G(2^m, 2^k)$ 가 노드 대칭적이므로 그래프의 모든 노드의 인덱스에 적절한 값을 더하여 w 가 v_0^0 이 되도록 노드를 새로 정의한 다음 w 에서 v 까지의 경로를 생각하면 마찬가지 경우가 된다. $i < 2^{k-1}$ 일 경우에는 v_0^0 에서 v_j^i 까지 v_j^0 을 지나는 최단 경로가 존재한다. $i = 2^{k-1}$ 일 경우에도 v_0^0 에서 v_j^i 까지 v_j^0 을 지나는 최단 경로가 존재한다고 가정한다. 이 가정이 정당한 것은 만약 그렇지 않을 경우 위와 같이 정점의 인덱스를 적절히 조절하여 이와 같은 경우로 변형할 수 있기 때문이다. 따라서 $d(v_0^0, v_j^i) = d(v_0^0, v_j^0) + i$ 가 성립한다. 성질 2에 의해서 $i = 2^{k-1}$ 이면서 G_0 가 K_2 와 동형인 경우는 발생하지 않고 다음에 다룰 경우 3에 해당한다.

G_0 상에서 v_0^0 에서 v_j^i 까지의 $\delta(G) - 2$ 개의 서로소인 경로를 재귀적으로 설계한다. 이들 중 길이가 최소인, 즉 $d(v_0^0, v_j^i)$ 인 경로 하나를 선택하여 정점 $v_j^1, v_j^2, \dots, v_j^i$ 를 차례로 지나도록 연장한다(그림 2 참조). 이 경로의 길이는 $d(v_0^0, v_j^0) + i$ 로 v_0^0 와 v_j^i 를 잇는 최단 경로가 된다. $\delta(G)$ 가 4인 경우에 나머지 한 개의 경로는 v_j^0 에 도달하기 직전에 정점 v_s^0 을 지난다고 하자. 이 경로를 v_s^0 을 지난 다음 (v_j^0 을 지나지 않고) 차례로 $v_s^1, v_s^2, \dots, v_s^i$ 를 지나서 v_j^i 에 도달하도록 확장한다. 확장된 경로는 모두 길이가 i 만큼 늘어난다.

이제 남은 두 경로를 정의하고자 한다. 경로 P_1 은 v_0^0 에서 $v_0^1, v_0^2, \dots, v_0^i$ 를 차례로 지난 다음 G_0 상에 있는 v_0^0 에서 v_j^0 까지 최단 경로의 사촌 경로 통하여 v_j^i 에 도달한다. 그리고 경로 P_2 는 v_0^0 에서 $G_{2^{k-1}}$ 에 있는 노드 $v_{2^{m-k-1}}^{2^{k-1}}$ 을 지나고 $G_{2^{k-1}}$ 상에서 $v_{2^{m-k-1}}^{2^{k-1}}$ 에서 $v_j^{2^{k-1}}$ 까지 최단 경로로 $v_j^{2^{k-1}}$ 에 도달한 다음 차례로 $v_j^{2^{k-2}}, v_j^{2^{k-3}}, \dots, v_j^1$ 를 지나는 경로이다. 설계한 경로는 모두 서로소이다.

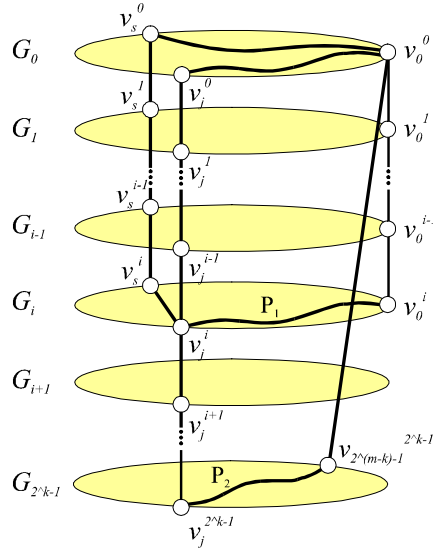


그림 2 경우 2의 설명

보조정리 3 경우 2에서 설계한 서로소인 경로는 위의 다섯 조건을 모두 만족한다.

증명 재귀적으로 설계하여 확장한 경로가 위 조건 (a), (b)를 만족함을 쉽게 알 수 있다. P_1 은 v_0^i 와 v_j^i 를 잇는 최단 경로가 되어 길이가 $d(v_0^i, v_j^i)$ 이다. P_2 의 길이는 $1 + d(v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_j^{2^k-1}) + 2^k - 1 - i \leq 1 + d(v_0^i, v_j^i) + 1 + 2^k - 1 - i = d(v_0^i, v_j^i) + 2^k - 1 + 2 - 2i \leq d(v_0^i, v_j^i) + 2^k - 1$ 이하가 된다. 따라서 경로 P_1, P_2 도 조건 (a)를 만족한다. 이제 지름에 관한 조건을 만족하는지 살펴보기로 한다. 재귀적으로 설계하여 확장한 경로의 길이는 모두 보조정리 1에 의하여 $\text{dia}(G_0) + 2^{k-1} - 1 + i \leq \text{dia}(G) + i \leq \text{dia}(G) + 2^{k-1}$ 이하이다. P_2 의 길이는 $1 + \text{dia}(G_{2^k-1}) + 2^k - 1 - i \leq \text{dia}(G) + 2^{k-1} + 1 - i \leq \text{dia}(G) + 2^{k-1}$ 이하임이 성립한다. 따라서 제시한 경로는 조건 (c)를 만족한다. 그리고 두 개의 최단 경로가 존재하므로 조건 (d)를 만족한다.

조건 (e)는 $\delta(G)$ 가 3인 경우에 두 최단 경로가 존재하므로 만족한다. $\delta(G)$ 가 4인 경우는 제시한 경로 중에 최단 경로를 제외하여도 길이가 $\text{dia}(G) + 1$ 이하인 경로가 존재함을 보인다. 재귀적으로 설계하여 확장한 경로 중에 최단 경로를 제외한 다른 경로를 P' 이라고 하자. 재귀적으로 설계한 최단 경로가 v_j^0 를 지나게 되는데, 일반성을 잃지 않고 $0 < j \leq 2^{m-k}/2$ 라고 가정한다. 그러면 P' 은 v_{j+1}^0 를 지나게 되므로, 길이가 $2^{m-k} - j - 1 + i + 1$ 이 된다. P_2 의 길이는 $1 + d(v_0^0, v_j^0) + 1 + 2^k - 1 - i = j + 2^k + 1 - i$ 이하가 된다. 두 경로 길이의 합은 $2^{m-k} + 2^k + 1$ 이하가 된다. 만약 두 경로의 길이가 모두 $\text{dia}(G) + 1$ 보다 크다면 $\text{dia}(G) \geq \text{dia}(G_0) + 2^{k-1} - 1 = 2^{m-k}/2 + 2^{k-1} - 1$ 이므로, 경로 길이의 합은 $2 \cdot \text{dia}(G) + 4 \geq 2^{m-k} + 2^k + 2$ 이상이 되어야 하므로 모순이다. 따

라서 조건 (e)도 만족한다. \square

경우 3 $w = v_0^i$, $i \neq 0$ 일 때

경우 2와 마찬가지로 일반성을 잃지 않고 $1 \leq i \leq 2^{k-1}$ 임을 가정한다. 성질 2에 의해서 $d(v_0^0, v_0^i) = i$ 가 성립한다. 우선 v_0^0 에서 v_0^i 까지 $\delta(G) - 2$ 개의 서로소인 경로를 정의한다(그림 3 참조). v_0^0 에 인접한 정점을 $v_{s_t}^0$, $1 \leq t \leq \delta(G) - 2$ 라고 하자. v_0^0 에서 $v_{s_t}^0$ 를 지난 다음 $v_{s_t}^1, v_{s_t}^2, \dots, v_{s_t}^i$ 를 차례로 지나서 v_0^i 에 도달하는 경로를 Q_t 라고 하자. Q_t 의 길이는 $1 + i + 1$ 이다. 경로 P_1 을 v_0^0 에서 직접 $v_0^1, v_0^2, \dots, v_0^i$ 을 지나는 최단 경로이다. P_2 는 $v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}$ 을 지난 다음 $v_0^{2^k-1}$ 을 지나고 다시 차례로 $v_0^{2^k-2}, v_0^{2^k-3}, \dots, v_0^i$ 를 지난다.

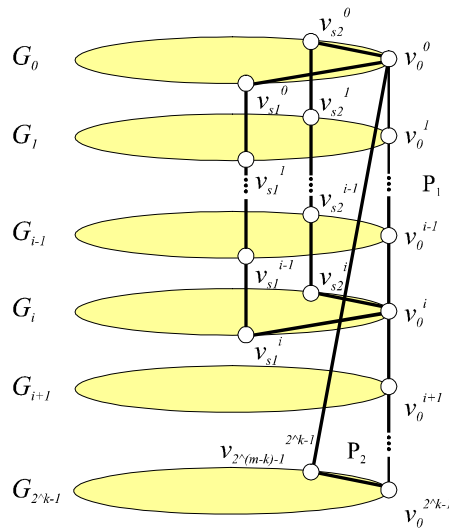


그림 3 경우 3의 설명

보조정리 4 경우 3에서 설계한 서로소인 경로는 위의 다섯 조건을 모두 만족한다.

증명 Q_t 의 길이는 $1 + i + 1 \leq i + 2^k - 1$ 이하이다. P_1 은 최단 경로이고, P_2 의 길이는 $1 + 1 + 2^k - 1 - i = i + 2^k - 1 + 2 - 2i \leq i + 2^k - 1$ 이 성립하므로 조건 (a), (b)를 만족한다. 이제 조건 (c)를 만족하는지를 살펴보기로 한다. Q_t 의 길이는 $1 + i + 1 \leq 2 + 2^{k-1} \leq \text{dia}(G) + 2^{k-1}$ 이하이다. P_2 의 길이는 $1 + 1 + 2^k - 1 - i \leq 2^k \leq \text{dia}(G) + 2^{k-1}$ 이하이다. 따라서 조건 (c)도 만족한다.

나머지 조건을 검사하기 위해서 먼저 $i < 2^{k-1}$ 인 경우를 고려한다. $\delta(G) = 3$ 일 때

Q_i 의 길이는 $1 + i + 1 \leq 2^{k-1} + 1 \leq \text{dia}(G) + 1$ 이하가 되어 조건이 성립한다. $\delta(G) = 4$ 일 때는 $\text{dia}(G) \geq 2^{k-1} + 1$ 이므로 Q_i 의 길이는 $1 + i + 1 \leq 2^{k-1} + 1 \leq \text{dia}(G)$ 가 되어 성립한다. 이제 $i = 2^{k-1}$ 인 경우를 생각한다. $\delta(G) = 3$ 일 때 P_2 의 길이는 $1 + 1 + 2^k - 1 - i = 2^{k-1} + 1 \leq \text{dia}(G) + 1$ 이하가 되어 조건을 만족한다. $\delta(G) = 4$ 일 때 P_2 의 길이는 $2^{k-1} + 1 \leq \text{dia}(G)$ 이하가 되고, Q_i 의 길이는 $1 + i + 1 \leq 2^{k-1} + 2 \leq \text{dia}(G) + 1$ 이하가 되어 조건을 만족한다. \square

3.2 $m > 2k$ 인 경우

이 절에서는 $m > 2k$ 인 경우에 $G(2^m, 2^k)$ 의 서로소인 경로를 $m \leq 2k$ 인 경우에 설계한 서로소인 경로를 이용하여 설계하고자 한다. $m > 2k$ 일 때 $G(2^m, 2^k)$ 는 재귀적 구조를 가지고 있어서 $G(2^{m-k}, 2^k)$ 와 동형인 $G_0, G_1, \dots, G_{2^{k-1}}$ 들로 구성되어 있는데, 각 G_i 도 재귀적 구조를 가지고 있어 $G(2^{m-2k}, 2^k)$ 와 동형인 $G_{i,0}, G_{i,1}, \dots, G_{i,2^{k-1}}$ 로 구성되어 있다. 이 경우 $\delta(G) = \delta(G_{0,0}) + 4$ 임과 $\text{dia}(G) = \text{dia}(G_{0,0}) + 2^k - 1$ 임을 기억한다.

일반성을 잃지 않고 $v = v_0^{0,0}$ 이라고 가정하고 w 가 어떤 $G_{i,i'}$ 에 속하느냐에 따라 다음과 같이 여섯 경우로 나누어 서로소인 경로를 제시한다. 그 후에 여기서 다루지 않은 경우는 여섯 경우와 대칭적임을 보이기로 한다.

경우 1 $w = v_j^{0,0}$

$v \neq w$ 이므로 $j \neq 0$ 이다. $G_{0,0}$ 상에서 $v_0^{0,0}$ 에서 $v_j^{0,0}$ 까지의 $\delta(G) - 4$ 개의 서로소인 경로를 재귀적으로 설계한다. 나머지 네 경로는 다음과 같이 정의한다. $v_0^{0,0}$ 에서 $v_0^{0,0}$ 를 지나고 $G_{1,0}$ 상에 최단 경로로 $v_j^{1,0}$ 까지 도달한 다음 $v_j^{0,0}$ 까지 연장한 경로를 P_1 이라고 한다(그림 4 참조). P_2 는 P_1 과 유사하게 정의되는데, $v_0^{0,0}$ 에서 출발하여 $v_0^{0,1}$ 를 지나고 $G_{0,1}$ 상에 최단 경로로 $v_j^{0,1}$ 을 지나 $v_j^{0,0}$ 에 도달하는 경로이다. 마찬가지로 방식으로 $G_{0,2^{k-1}}$ 상의 정점을 지나는 경로를 P_3 , $G_{2^{k-1}, 2^{k-1}}$ 상의 정점을 지나는 경로를 P_4 라고 한다. 제시한 경로가 서로소임은 자명하다.

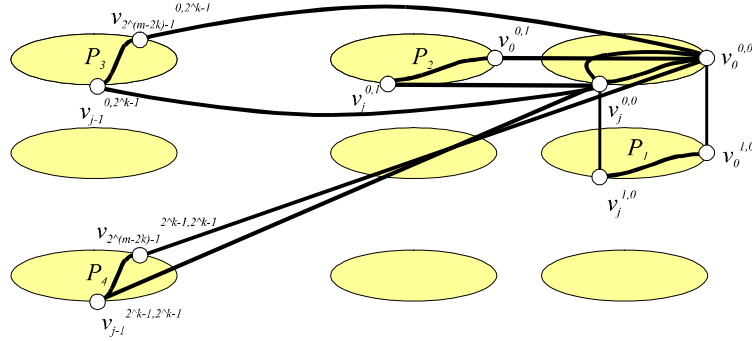


그림 4 경우 1의 설명

보조정리 5 경우 1에서 설계한 서로소인 경로는 위의 다섯 조건을 모두 만족한다.

증명 경로 P_1 의 길이는 $1 + d(v_0^{0,0}, v_j^{0,0}) + 1 = d(v_0^{0,0}, v_j^{0,0}) + 2$ 이다. 경로 P_2, P_3, P_4 의 길이도 마찬가지이다. 재귀적으로 설계한 $\delta(G) - 4$ 개의 경로와 함께 이 경로는 조건 (a), (b)를 만족함을 알 수 있다. 지름을 기준으로 보면 P_1 의 길이는 $d(v_0^{0,0}, v_j^{0,0}) + 2 \leq \text{dia}(G_{0,0}) + 2 \leq \text{dia}(G)$ 이하이다. P_2, P_3, P_4 의 길이도 마찬가지이므로, 서로소인 경로가 나머지 조건 (c), (d), (e)를 만족함도 쉽게 알 수 있다. \square

경우 2 $w = v_j^{0,i'}, 1 \leq i' \leq 2^k - 1$

$v_j^{0,i'}$ 과 $v_0^{0,0}$ 를 잇는 어떤 최단 경로는 $1 \leq i' \leq 2^{k-1} - 1$ 이면 $v_j^{0,0}$ 를 지나고, $2^{k-1} + 1 \leq i' \leq 2^k - 1$ 이면 $v_{j+1}^{0,0}$ 를 지나며, $i' = 2^{k-1}$ 이면 $v_j^{0,0}$ 나 $v_{j+1}^{0,0}$ 를 지난다. 재귀원형군이 노드 대칭적이므로 일반성을 잃지 않고 $1 \leq i' \leq 2^{k-1}$ 이면서 $v_j^{0,0}$ 를 지나는 최단 경로가 존재함을 가정할 수 있다. 이 때 $d(v_0^{0,0}, v_j^{0,i'}) = d(v_0^{0,0}, v_j^{0,0}) + i'$ 이 성립한다. 우선 $j \neq 0$ 인 경우를 고려하고 $j = 0$ 인 경우는 나중에 생각하기로 한다.

$G_{0,0}$ 상에서 $v_0^{0,0}$ 에서 $v_j^{0,0}$ 까지의 $\delta(G) - 4$ 개의 서로소인 경로를 재귀적으로 설계한다. 이 경로들 중에서 최단 경로를 선택하여 $v_j^{0,1}, v_j^{0,2}, \dots, v_j^{0,i'}$ 을 순서대로 지나도록 연장한다(그림 5 참조). 이 경로는 $v_0^{0,0}$ 과 $v_j^{0,i'}$ 을 잇는 최단 경로가 된다. 나머지 $\delta(G) - 5$ 개의 경로는 $v_j^{0,0}$ 에 도달하기 직전에 $v_{s_t}^{0,0}, 1 \leq t \leq \delta(G) - 5$ 를 지난다고 하자. $v_{s_t}^{0,0}$ 를 지난 다음 $v_{s_t}^{0,1}, v_{s_t}^{0,2}, \dots, v_{s_t}^{0,i'}$ 를 지나서 $v_j^{0,i'}$ 에 도달하도록 연장한다. 이들 경로의 길이는 모두 i' 만큼 늘어난다.

경로 P_1 은 $v_0^{0,0}, v_0^{0,1}, \dots, v_0^{0,i'}$ 을 차례로 지난 다음, $G_{0,0}$ 상에서 $v_0^{0,0}$ 와 $v_j^{0,0}$ 를 잇

는 최단 경로의 사촌 경로를 거쳐 $v_j^{0,i'}$ 에 도달한다. P_2 는 $v_0^{0,0}$ 에서 출발하여 $v_0^{1,0}$ 를 지난 후, $G_{1,0}$ 상에서 최단 경로로 $v_j^{1,0}$ 에 도달한 다음 다시 $v_j^{1,1}, v_j^{1,2}, \dots, v_j^{1,i'}$ 을 차례로 지난 후 $v_j^{0,i'}$ 에 도달한다. P_3 는 $v_0^{0,0}$ 에서 출발하여 $v_{2^{m-2k-1}}^{0,2^k-1}$ 을 지난 후 $G_{0,2^k-1}$ 상에서 최단 경로로 $v_j^{0,2^k-1}$ 에 도달하고 다시 $v_j^{0,2^k-2}, v_j^{0,2^k-3}, \dots, v_j^{0,i'}$ 에 도달한다. P_4 는 $v_0^{0,0}$ 에서 $v_{2^{m-2k-1}}^{2^k-1,2^k-1}$ 을 지나고 $G_{2^k-1,2^k-1}$ 상에서 최단 경로를 따라 $v_{j-1}^{2^k-1,2^k-1}$ 에 도달한 다음 차례로 $v_j^{2^k-1,0}, v_j^{2^k-1,1}, \dots, v_j^{2^k-1,i'-1}$ 을 지나 $v_j^{0,i'}$ 에 도달한다.

이제 $j=0$, 즉 $w=v_0^{0,i'}$ 인 경우를 고려한다. $G_{0,0}$ 상에서 $v_0^{0,0}$ 에 인접한 정점을 $v_{s_t}^{0,0}$, $1 \leq t \leq \delta(G) - 4$ 라고 하자. $v_0^{0,0}$ 에 출발하여 차례로 $v_{s_t}^{0,0}, v_{s_t}^{0,1}, \dots, v_{s_t}^{0,i'}$ 을 지난 다음 $v_0^{0,i'}$ 에 도달하도록 설계한다. 이들 경로의 길이는 $i' + 2$ 이다. 경로 P_1 은 차례로 $v_0^{0,0}, v_0^{0,1}, \dots, v_0^{0,i'}$ 을 지나는 최단 경로이다. 나머지 경로 P_2, P_3, P_4 는 $j \neq 0$ 인 경우와 같다.

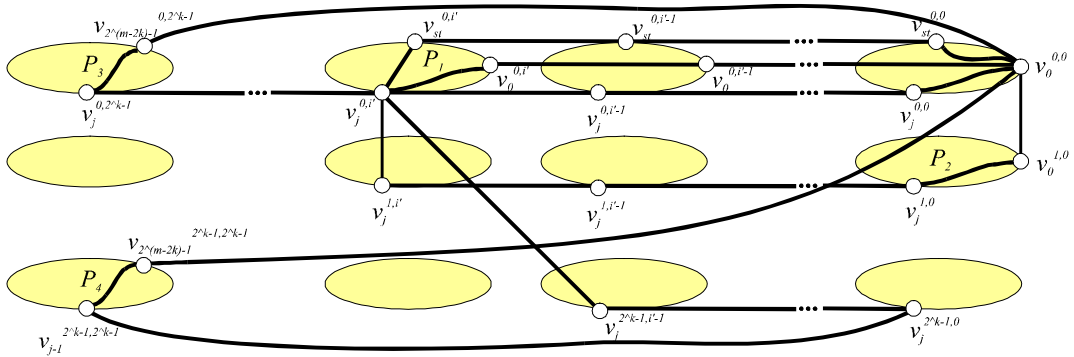


그림 5 경우 2의 설명

보조정리 6 경우 2에서 설계한 서로소인 경로는 위의 다섯 조건을 모두 만족한다.

증명 먼저 $j \neq 0$ 인 경우를 고려한다. P_1 은 $v_0^{0,0}$ 와 $v_j^{0,i'}$ 를 잇는 최단 경로이고, P_2 의 길이는 $1 + d(v_0^{1,0}, v_j^{1,0}) + i' + 1 = d(v_0^{0,0}, v_j^{0,i'}) + 2$ 이다. P_3 의 길이는 $1 + d(v_{2^{m-2k-1}}^{0,2^k-1}, v_j^{0,2^k-1}) + 2^k - 1 - i'$ 인데, $d(v_{2^{m-2k-1}}^{0,2^k-1}, v_j^{0,2^k-1}) \leq d(v_0^{0,0}, v_j^{0,0}) + 1$ 이므로 결국 길이는 $d(v_0^{0,0}, v_j^{0,i'}) + 2^k - 1 + 2 - 2i'$ 이하가 되고, $i' > 0$ 이므로 $d(v_0^{0,0}, v_j^{0,i'}) + 2^k - 1$ 이하가 된다. P_4 의 길이는 $1 + d(v_{2^{m-2k-1}}^{2^k-1,2^k-1}, v_{j-1}^{2^k-1,2^k-1}) + 1 + i' - 1 + 1 = d(v_0^{0,0}, v_j^{0,i'}) + 2$ 가 된다. 재귀적으로 설계한 경로와 함께 이 네 경로가 조건 (a), (b)를 만족함은 쉽게 알 수 있다. P_2, P_4 의 길이는 $\text{dia}(G_{0,0}) + i' + 2 \leq \text{dia}(G_{0,0}) + 2^{k-1} + 2 \leq \text{dia}(G) - 2^{k-1} + 3 \leq \text{dia}(G) + 1$ 이하이다. P_3 의 길이는 $1 + \text{dia}(G_{0,0})$

+ $2^k - 1 - i' \leq \text{dia}(G) + 1 - i' \leq \text{dia}(G)$ 이다. 재귀적으로 설계한 경로의 길이는 i' 만큼 늘었고, 추가한 네 경로 중 둘은 길이가 $\text{dia}(G)$ 이하이고 나머지 둘의 길이는 $\text{dia}(G) + 1$ 이하이므로 당연히 나머지 조건도 만족한다. $j = 0$ 인 경우 $\delta(G) - 4$ 개의 경로의 길이는 $i' + 2$ 이고 P_1 이 최단 경로임을 생각하면 조건 (a), (b)를 만족함을 알 수 있고, 나머지 조건도 $\delta(G) - 4$ 개의 경로의 길이가 $i' + 2 \leq 2^{k-1} + 2 \leq 2^k \leq \text{dia}(G)$ 이므로 모두 만족함을 알 수 있다. \square

경우 3 $w = v_j^i, 1 \leq i \leq 2^{k-1}$

먼저 v_0^0 과 v_j^0 를 잇는 최단 경로는 v_j^0 를 지남을 보인다. $1 \leq i \leq 2^{k-1} - 1$ 인 경우는 당연히 성립하므로 $i = 2^{k-1}$ 인 경우를 생각한다. 최단 경로 성질에 의해서 v_j^0 나 혹은 v_j^1 을 지나는 최단 경로가 존재한다. G_0 가 $G(2^{m-k}, 2^k)$ 와 동형이므로 최단 경로 성질을 다시 적용하면 v_j^1 과 v_0^0 간에 v_0^1 을 지나는 최단 경로가 존재한다. 따라서 v_j^1 을 지나는 v_0^0 과 v_j^0 사이의 최단 경로의 길이는 $2^{k-1} + d(v_j^1, v_0^1) + 1 = d(v_j^0, v_0^0) + 2^{k-1} + 1$ 이다. v_j^0 을 지나는 최단 경로의 길이는 $2^{k-1} + d(v_j^0, v_0^0)$ 이므로 증명이 완성된다. 따라서 $d(v_0^0, v_j^i) = d(v_0^0, v_j^0) + i$ 가 성립한다. $j \neq 0$ 인 경우를 먼저 고려한다.

$G_{0,0}$ 상에서 v_0^0 에서 v_j^0 까지의 $\delta(G) - 4$ 개의 서로소인 경로를 재귀적으로 설계한다. 이 경로들 중에서 최단 경로를 연장하여 $v_j^1, v_j^2, \dots, v_j^0$ 을 순서대로 지난다(그림 6참조). 이 경로는 v_0^0 과 v_j^0 을 잇는 최단 경로가 된다. 나머지 $\delta(G) - 5$ 개의 경로는 v_j^0 에 도달하기 직전에 $v_{s_t}^0, 1 \leq t \leq \delta(G) - 5$ 를 지난다고 하자. $v_{s_t}^0$ 를 지난 다음 $v_{s_t}^1, v_{s_t}^2, \dots, v_{s_t}^0$ 를 지나서 v_j^0 에 도달하도록 연장한다. 이들 경로의 길이는 모두 i 만큼 늘어난다.

경로 P_1 은 $v_0^0, v_1^0, \dots, v_j^0$ 을 차례로 지난 다음, $G_{0,0}$ 상에서 v_0^0 와 v_j^0 를 잇는 최단 경로의 사촌 경로를 거쳐 v_j^0 에 도달한다. P_2 는 v_0^0 에서 출발하여 v_0^1 을 지나고, $G_{0,1}$ 상에서 최단 경로로 v_j^1 에 도달한 다음 $v_j^1, v_j^2, \dots, v_j^0$ 을 지나서 v_j^0 에 도달한다. P_3 는 v_0^0 에서 출발하여 $v_{2^{m-2k-1}}^{0,2^{k-1}}$ 을 지난 후 $G_{0,2^{k-1}}$ 상에서 최단 경로로 $v_{j-1}^{0,2^{k-1}}$ 에 도달한 후 $v_{j-1}^{1,2^{k-1}}, v_{j-1}^{2,2^{k-1}}, \dots, v_{j-1}^{i,2^{k-1}}$ 를 거쳐 v_j^0 에 도달한다. P_4 는 v_0^0 에서 $v_{2^{m-2k-1}}^{2^{k-1},2^{k-1}}$ 을 지나고 $G_{2^{k-1},2^{k-1}}$ 상에서 최단 경로를 따라 $v_{j-1}^{2^{k-1},2^{k-1}}$ 에 도달한 다음 차례로 $v_j^{2^{k-1},0}, v_j^{2^{k-2},0}, \dots, v_j^{i,0}$ 에 도달한다.

이제 $j=0$, 즉 $w = v_0^{i,0}$ 인 경우를 고려한다. $G_{0,0}$ 상에서 $v_0^{0,0}$ 에 인접한 정점을 $v_{s_t}^{0,0}$, $1 \leq t \leq \delta(G) - 4$ 라고 하자. $v_0^{0,0}$ 에 출발하여 차례로 $v_{s_1}^{0,0}$, $v_{s_2}^{0,0}$, \dots , $v_{s_i}^{0,0}$ 을 지난 다음 $v_0^{i,0}$ 에 도달하도록 설계한다. 이들 경로의 길이는 $i+2$ 이다. 경로 P_1 은 차례로 $v_0^{0,0}$, $v_0^{0,0}$, \dots , $v_0^{i,0}$ 을 지나는 최단 경로이다. 나머지 경로 P_2, P_3, P_4 는 $j \neq 0$ 인 경우와 같이 설계한다.

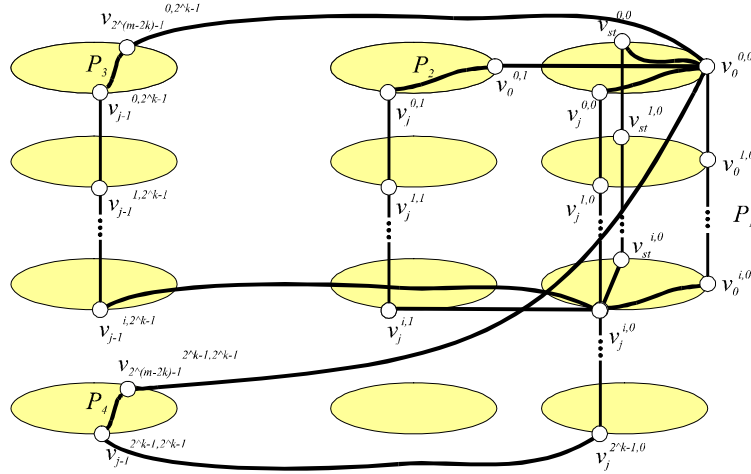


그림 6 경우 3의 설명

보조정리 7 경우 3에서 설계한 서로소인 경로는 위의 다섯 조건을 모두 만족한다.

증명 먼저 $j \neq 0$ 인 경우를 고려한다. P_1 은 $v_0^{0,0}$ 와 $v_j^{i,0}$ 를 잇는 최단 경로이고, P_2 의 길이는 $1 + d(v_0^{0,1}, v_j^{0,1}) + i + 1 = d(v_0^{0,0}, v_j^{i,0}) + 2$ 이다. P_3 의 길이는 $1 + d(v_{2^{m-2k}-1}^{0,2^k-1}, v_{j-1}^{0,2^k-1}) + i + 1 = d(v_0^{0,0}, v_j^{i,0}) + 2$ 이다. P_4 의 길이는 $1 + d(v_{2^{m-2k}-1}^{2^k-1,2^k-1}, v_{j-1}^{2^k-1,2^k-1}) + 1 + 2^k - 1 - i = d(v_0^{0,0}, v_j^{i,0}) + 2^k - 1 + 2 - 2i \leq d(v_0^{0,0}, v_j^{i,0}) + 2^k - 1$ 이 된다. 조건 (a), (b)를 만족한다. P_2, P_3 의 길이는 $1 + \text{dia}(G_{0,0}) + i + 1 \leq \text{dia}(G) - 2^{k-1} + 3 \leq \text{dia}(G) + 1$ 이하이다. P_4 의 길이는 $1 + \text{dia}(G_{0,0}) + 1 + 2^k - 1 - i \leq \text{dia}(G) + 1$ 이하이다. 조건 (c), (e)를 만족한다. $i = 1$ 인 경우는 P_2 의 길이가 $\text{dia}(G_{0,0}) + 3 \leq \text{dia}(G)$ 이하이고, $i \geq 2$ 이면 P_4 의 길이가 $\text{dia}(G)$ 이하가 되므로 조건 (d)도 만족한다. $j = 0$ 인 경우 $\delta(G) - 4$ 개의 경로의 길이는 $i + 2$ 이고 P_1 이 최단 경로임을 생각하면, 다섯 조건을 모두 만족함을 보일 수 있다. \square

경우 4 $w = v_j^{i,i'}$, $1 \leq i \leq 2^{k-1}$, $1 \leq i' \leq 2^{k-1} - 1$

최단 경로 성질에 의해서 $v_0^{0,0}$ 과 $v_j^{i,i'}$ 를 잇는 최단 경로는 $v_j^{0,i'}$ 과 $v_j^{0,0}$ 를 지나므로 $d(v_0^{0,0}, v_j^{i,i'}) = d(v_0^{0,0}, v_j^{0,0}) + i + i'$ 이 성립한다. $j \neq 0$ 인 경우를 먼저 고려한다. $G_{0,0}$ 상에서 $v_0^{0,0}$ 에서 $v_j^{0,0}$ 까지의 $\delta(G) - 4$ 개의 서로소인 경로를 재귀적으로 설계한다. 이 경로들 중에서 최단 경로를 연장하여 $v_j^{0,1}, v_j^{0,2}, \dots, v_j^{0,i'}$ 을 지난 다음 $v_j^{1,i'}, v_j^{2,i'}, \dots, v_j^{i,i'}$ 을 순서대로 지나게 한다(그림 7 참조). 이 경로는 $v_0^{0,0}$ 과 $v_j^{i,i'}$ 을 잇는 최단 경로가 된다. 나머지 $\delta(G) - 5$ 개의 경로는 $v_j^{0,0}$ 에 도달하기 직전에 $v_{s_t}^{0,0}, 1 \leq t \leq \delta(G) - 5$ 를 지난다고 하자. $v_{s_t}^{0,0}$ 를 지난 다음 $v_{s_t}^{0,1}, v_{s_t}^{0,2}, \dots, v_{s_t}^{0,i'}$ 을 지난 다음 다시 $v_{s_t}^{1,i'}, v_{s_t}^{2,i'}, \dots, v_{s_t}^{i,i'}$ 을 순서대로 지나서 $v_j^{i,i'}$ 에 도달하도록 연장한다. 이들 경로의 길이는 모두 $i + i'$ 만큼 늘어난다.

경로 P_1 은 $v_0^{0,0}, v_0^{0,1}, \dots, v_0^{0,i'}$ 을 차례로 지난 다음 다시 $v_0^{1,i'}, v_0^{2,i'}, \dots, v_0^{i,i'}$ 에 도달한 후, $G_{0,0}$ 상에서 $v_0^{0,0}$ 와 $v_j^{0,0}$ 를 잇는 최단 경로의 사촌 경로를 거쳐 $v_j^{i,i'}$ 에 도달한다. P_2 는 $v_0^{0,0}, v_0^{1,0}, \dots, v_0^{i,0}$ 을 차례로 지난 다음, $G_{i,0}$ 상에서 최단 경로를 거쳐 $v_j^{0,0}$ 에 도달한 다음 다시 $v_j^{1,1}, v_j^{2,2}, \dots, v_j^{i,i'}$ 에 도달한다. P_3 는 $v_0^{0,0}$ 에서 출발하여 $v_{2^{m-2k-1}}^{0,2^k-1}$ 을 지난 후 $G_{0,2^k-1}$ 상에서 최단 경로로 $v_j^{0,2^k-1}$ 을 지나고, 다시 $v_j^{1,2^k-1}, v_j^{2,2^k-1}, \dots, v_j^{i,2^k-1}$ 를 차례로 지난 후 $v_j^{i,2^k-2}, v_j^{i,2^k-3}, \dots, v_j^{i,i'}$ 에 도달한다. P_4 는 $v_0^{0,0}$ 에서 $v_{2^{m-2k-1}}^{2^k-1,2^k-1}$ 을 지나고 $G_{2^k-1,2^k-1}$ 상에서 최단 경로를 따라 $v_{j-1}^{2^k-1,2^k-1}$ 에 도달한 다음 차례로 $v_j^{2^k-1,0}, v_j^{2^k-1,1}, \dots, v_j^{2^k-1,i'}$ 을 지나고 다시 $v_j^{2^k-2,i'}, v_j^{2^k-3,i'}, \dots, v_j^{i,i'}$ 에 도달한다.

이제 $j = 0$, 즉 $w = v_0^{i,i'}$ 인 경우를 고려한다. $G_{0,0}$ 상에서 $v_0^{0,0}$ 에 인접한 정점을 $v_{s_t}^{0,0}, 1 \leq t \leq \delta(G) - 4$ 라고 하자. $v_0^{0,0}$ 에서 출발하여 $v_{s_t}^{0,0}, v_{s_t}^{0,1}, \dots, v_{s_t}^{0,i'}$ 을 지나고 다시 $v_{s_t}^{1,i'}, v_{s_t}^{2,i'}, \dots, v_{s_t}^{i,i'}$ 을 지난 다음 $v_0^{i,i'}$ 에 도달하도록 설계한다. 이들 경로의 길이는 $i + i' + 2$ 이다. 경로 P_1 은 차례로 $v_0^{0,0}, v_0^{0,1}, \dots, v_0^{0,i'}$ 을 지나고 다시 $v_0^{1,i'}, v_0^{2,i'}, \dots, v_0^{i,i'}$ 을 지나는 최단 경로이다. 나머지 경로 P_2, P_3, P_4 는 $j \neq 0$ 인 경우와 마찬가지로 정의한다.

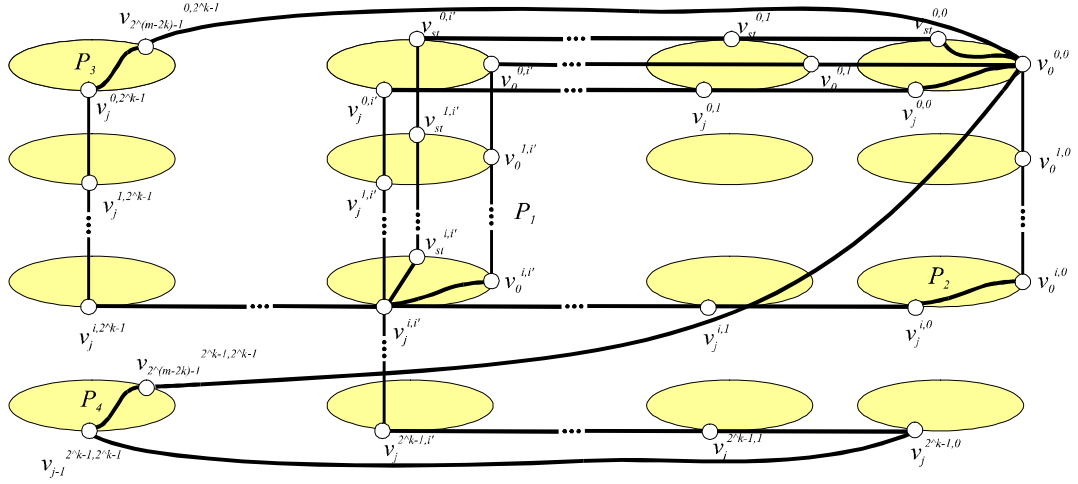


그림 7 경우 4의 설명

보조정리 8 경우 4에서 설계한 서로소인 경로는 위의 다섯 조건을 모두 만족한다.

증명 먼저 $j \neq 0$ 인 경우를 고려한다. P_1 과 P_2 는 $v_0^{0,0}$ 와 $v_j^{i,i'}$ 를 잇는 최단 경로가 된다. P_3 의 길이는 $1 + d(v_{2^{m-2k}-1}^{0,2^k-1}, v_j^{0,2^k-1}) + i + 2^k - 1 - i'$ 인데, $d(v_{2^{m-2k}-1}^{0,2^k-1}, v_j^{0,2^k-1}) \leq d(v_0^{0,0}, v_j^{0,0}) + 1$ 이므로 결국 $d(v_0^{0,0}, v_j^{i,i'}) + 2^k - 1 + 2 - 2i' \leq d(v_0^{0,0}, v_j^{i,i'}) + 2^k - 1$ 이하가 된다. P_4 의 길이는 $1 + d(v_{2^{m-2k}-1}^{2^k-1,2^k-1}, v_{j-1}^{2^k-1,2^k-1}) + 1 + i' + 2^k - 1 - i = d(v_0^{0,0}, v_j^{i,i'}) + 2^k - 1 + 2 - 2i \leq d(v_0^{0,0}, v_j^{i,i'}) + 2^k - 1$ 이하가 된다. 따라서 조건 (a), (b)를 만족한다.

P_3 의 길이는 $1 + \text{dia}(G_{0,0}) + i + 2^k - 1 - i' = \text{dia}(G) + i - i' + 1 \leq \text{dia}(G) + 2^{k-1}$ 이하이다. P_4 의 길이는 $1 + \text{dia}(G_{0,0}) + 1 + i' + 2^k - 1 - i = \text{dia}(G) + i' - i + 2 \leq \text{dia}(G) + 2^{k-1}$ 이하이다. 따라서 조건 (c), (d)는 만족한다. 조건 (e)를 만족함을 보이기 위해서 P_3, P_4 중 한 경로의 길이가 $\text{dia}(G) + 1$ 이하임을 보인다. 두 경로 길이의 합 $\text{dia}(G) + i - i' + 1 + \text{dia}(G) + i' - i + 2 = 2 \cdot \text{dia}(G) + 3$ 이하이므로, 반드시 둘 중 한 경로의 길이는 $\text{dia}(G) + 1$ 이하이다. $j = 0$ 인 경우 $\delta(G) - 4$ 개의 경로의 길이는 $i + i' + 2$ 이고 P_1 과 P_2 가 최단 경로임을 생각하면, 다섯 조건을 모두 만족함을 보일 수 있다. \square

경우 5 $w = v_j^{i,i'}, 1 \leq i \leq 2^{k-1} - 1, 2^{k-1} + 1 \leq i' \leq 2^k - 1$

최단 경로 성질에 의해서 $v_0^{0,0}$ 과 $v_j^{i,i'}$ 를 잇는 최단 경로는 $v_j^{0,i'}$ 과 $v_{j+1}^{0,0}$ 를 지나므로 $d(v_0^{0,0}, v_j^{i,i'}) = d(v_0^{0,0}, v_{j+1}^{0,0}) + i + 2^k - i'$ 이 성립한다. $j + 1 \neq 0$ 인 경우를 먼저 고

려한다. $G_{0,0}$ 상에서 $v_0^{0,0}$ 에서 $v_{j+1}^{0,0}$ 까지의 $\delta(G) - 4$ 개의 서로소인 경로를 재귀적으로 설계한다. 이 경로들 중에서 최단 경로를 $v_j^{0,2^k-1}, v_j^{0,2^k-2}, \dots, v_j^{0,i'}$ 을 지난 다음 다시 $v_j^{1,i'}, v_j^{2,i'}, \dots, v_j^{i',i'}$ 을 순서대로 지나도록 연장한다(그림 8 참조). 이 경로는 $v_0^{0,0}$ 과 $v_j^{i',i'}$ 을 잇는 최단 경로가 된다. 나머지 $\delta(G) - 5$ 개의 경로는 $v_{j+1}^{0,0}$ 에 도달하기 직전에 $v_{s_t}^{0,0}, 1 \leq t \leq \delta(G) - 5$ 를 지난다고 하자. $v_{s_t}^{0,0}$ 를 지난 다음 $v_{s_t-1}^{0,2^k-1}, v_{s_t-1}^{0,2^k-2}, \dots, v_{s_t-1}^{0,i'}$ 을 지난 다음 다시 $v_{s_t-1}^{1,i'}, v_{s_t-1}^{2,i'}, \dots, v_{s_t-1}^{i',i'}$ 을 순서대로 지나서 $v_j^{i',i'}$ 에 도달하도록 연장한다. 이들 경로의 길이는 모두 $i + 2^k - i'$ 만큼 늘어난다.

경로 P_1 은 $v_0^{0,0}, v_{2^{m-2k}-1}^{0,2^k-1}, v_{2^{m-2k}-1}^{0,2^k-2}, \dots, v_{2^{m-2k}-1}^{0,i'}$ 을 차례로 지난 다음 다시 $v_{2^{m-2k}-1}^{1,i'}, v_{2^{m-2k}-1}^{2,i'}, \dots, v_{2^{m-2k}-1}^{i',i'}$ 에 도달한 후, $G_{0,0}$ 상에서 $v_0^{0,0}$ 와 $v_{j+1}^{0,0}$ 를 잇는 최단 경로의 사촌 경로에 있는 모든 노드의 인덱스에 1을 빼어 얻어지는 경로를 거쳐 $v_j^{i',i'}$ 에 도달한다. P_2 는 $v_0^{0,0}, v_0^{1,0}, \dots, v_0^{i',0}$ 을 차례로 지난 다음, $G_{i,0}$ 상에서 최단 경로를 거쳐 $v_{j+1}^{0,0}$ 에 도달한 다음 다시 $v_j^{i',2^k-1}, v_j^{i',2^k-2}, \dots, v_j^{i',i'}$ 에 도달한다. P_3 는 $v_0^{0,0}$ 에서 출발하여 $v_0^{0,1}$ 을 지난 후 $G_{0,1}$ 상에서 $v_j^{0,1}$ 까지 최단 경로로 도달한 후 $v_j^{1,1}, v_j^{2,1}, \dots, v_j^{i',1}$ 를 차례로 지난 후 다시 $v_j^{i',2}, v_j^{i',3}, \dots, v_j^{i',i'}$ 에 도달한다. P_4 는 $v_0^{0,0}$ 에서 $v_{2^{m-2k}-1}^{2^k-1,2^k-1}$ 을 지나고 $G_{2^k-1,2^k-1}$ 상에서 최단 경로를 따라 $v_j^{2^k-1,2^k-1}$ 에 도달한 다음 차례로 $v_j^{2^k-1,2^k-2}, v_j^{2^k-1,2^k-3}, \dots, v_j^{2^k-1,i'}$ 을 지나고 다시 $v_j^{2^k-2,i'}, v_j^{2^k-3,i'}, \dots, v_j^{i',i'}$ 에 도달하도록 정의한다.

이제 $j+1=0$, 즉 $w = v_{2^{m-2k}-1}^{i',i'}$ 인 경우를 고려한다. $G_{0,0}$ 상에서 $v_0^{0,0}$ 에 인접한 정점을 $v_{s_t}^{0,0}, 1 \leq t \leq \delta(G) - 4$ 라고 하자. $v_0^{0,0}$ 에 출발하여 $v_{s_t}^{0,0}$ 에 도달한 다음 $v_{s_t-1}^{0,2^k-1}, v_{s_t-1}^{0,2^k-2}, \dots, v_{s_t-1}^{0,i'}$ 을 지나고 다시 $v_{s_t-1}^{1,i'}, v_{s_t-1}^{2,i'}, \dots, v_{s_t-1}^{i',i'}$ 을 지난 다음 $v_{2^{m-2k}-1}^{i',i'}$ 에 도달하도록 설계한다. 이들 경로의 길이는 $i + 2^k - i' + 2$ 이다. 경로 P_1 은 $v_0^{0,0}$ 에서 출발하여 차례로 $v_{2^{m-2k}-1}^{0,2^k-1}, v_{2^{m-2k}-1}^{0,2^k-2}, \dots, v_{2^{m-2k}-1}^{0,i'}$ 을 지나고 다시 $v_{2^{m-2k}-1}^{1,i'}, v_{2^{m-2k}-1}^{2,i'}, \dots, v_{2^{m-2k}-1}^{i',i'}$ 을 지나서 최단 경로이다. 나머지 경로 P_2, P_3, P_4 는 $j+1 \neq 0$ 인 경우와 같이 정의한다.

$v_j^{0,0}$ 를 지나고, $d(v_0^{0,0}, v_j^{0,0}) > d(v_0^{0,0}, v_{j+1}^{0,0})$ 인 경우는 $v_{j+1}^{0,0}$ 을 지나며, $d(v_0^{0,0}, v_j^{0,0}) = d(v_0^{0,0}, v_{j+1}^{0,0})$ 인 경우는 각각을 지나는 최단 경로가 존재한다.

최단 경로가 $v_j^{0,0}$ 을 지날 경우에는 $d(v_0^{0,0}, v_j^{2^{k-1}}) = d(v_0^{0,0}, v_j^{0,0}) + i + 2^{k-1}$ 이 성립하는데, 경우 4와 같은 방식으로 서로소인 경로를 설계한다. 단, 경로 P_4 는 $v_0^{0,0}$ 에서 $v_{2^{m-2k-1}}^{2^{k-1}, 2^{k-1}}$ 을 지나고 $G_{2^{k-1}, 2^{k-1}}$ 상에서 최단 경로를 따라 $v_j^{2^{k-1}, 2^{k-1}}$ 에 도달한 다음 차례로 $v_j^{2^{k-1}, 2^{k-2}}$, $v_j^{2^{k-1}, 2^{k-3}}$, ..., $v_j^{2^{k-1}, 2^{k-1}}$ 을 지나고 다시 $v_j^{2^{k-2}, 2^{k-1}}$, $v_j^{2^{k-3}, 2^{k-1}}$, ..., $v_j^{i, 2^{k-1}}$ 에 도달하도록 설계한다. $v_0^{0,0}$ 과 $v_j^{2^{k-1}}$ 를 잇는 최단 경로가 $v_{j+1}^{0,0}$ 을 지날 경우에는 경우 5와 같은 방식으로 설계한다. 이 때 $d(v_0^{0,0}, v_j^{2^{k-1}}) = d(v_0^{0,0}, v_{j+1}^{0,0}) + i + 2^{k-1}$ 이 성립한다.

보조정리 10 경우 6에서 설계한 서로소인 경로는 위의 다섯 조건을 모두 만족한다.

증명 먼저 $v_0^{0,0}$ 과 $v_j^{2^{k-1}}$ 를 잇는 최단 경로가 $v_j^{0, 2^{k-1}}$ 와 $v_j^{0,0}$ 을 지나게 되는 경우를 고려한다. $j \neq 0$ 일 때를 생각하여 보자. P_1 과 P_2 는 $v_0^{0,0}$ 와 $v_j^{2^{k-1}}$ 를 잇는 최단 경로가 된다. P_3 의 길이는 $1 + d(v_{2^{m-2k-1}}^{0, 2^{k-1}}, v_j^{0, 2^{k-1}}) + i + 2^{k-1} - 1$ 인데, $d(v_{2^{m-2k-1}}^{0, 2^{k-1}}, v_j^{0, 2^{k-1}}) \leq d(v_0^{0,0}, v_j^{0,0}) + 1$ 이므로 결국 $d(v_0^{0,0}, v_j^{2^{k-1}}) + 1$ 이하가 된다. P_4 의 길이는 $1 + d(v_{2^{m-2k-1}}^{2^{k-1}, 2^{k-1}}, v_j^{2^{k-1}, 2^{k-1}}) + 2^{k-1} - 1 + 2^k - 1 - i \leq 1 + d(v_0^{0,0}, v_j^{0,0}) + 1 + 2^{k-1} - 1 + 2^k - 1 - i = d(v_0^{0,0}, v_j^{2^{k-1}}) + 2^k - 2i \leq d(v_0^{0,0}, v_j^{2^{k-1}}) + 2^k - 2$ 이하가 된다. 이 경로들이 조건 (a), (b)를 만족함을 알 수 있다. 나머지 조건을 만족하는지를 알기 위해서 P_3 과 P_4 의 길이를 다시 생각한다. P_3 의 길이는 $1 + \text{dia}(G_{0,0}) + i + 2^{k-1} - 1 = \text{dia}(G) - 2^{k-1} + i + 1 \leq \text{dia}(G)$ 이하이다. P_4 의 길이는 $1 + \text{dia}(G_{0,0}) + 2^{k-1} - 1 + 2^k - 1 - i = \text{dia}(G) + 2^{k-1} - i \leq \text{dia}(G) + 2^{k-1} - 1$ 이하이다. 따라서 나머지 조건을 만족한다. $j = 0$ 인 경우도 다섯 조건을 모두 만족함을 보일 수 있다.

이제 $v_0^{0,0}$ 과 $v_j^{2^{k-1}}$ 를 잇는 최단 경로가 $v_j^{0, 2^{k-1}}$ 와 $v_{j+1}^{0,0}$ 을 지나게 되는 경우를 고려한다. 먼저 $j + 1 \neq 0$ 일 때를 생각한다. P_1 과 P_2 는 $v_0^{0,0}$, $v_j^{i,i}$ 를 잇는 최단 경로이다. P_3 의 길이는 $1 + d(v_0^{0,1}, v_j^{0,1}) + i + 2^{k-1} - 1 \leq 1 + d(v_0^{0,0}, v_{j+1}^{0,0}) + 1 + i + 2^{k-1} - 1 = d(v_0^{0,0}, v_j^{i,i}) + 1$ 이하이다. P_4 의 길이는 $1 + d(v_{2^{m-2k-1}}^{2^{k-1}, 2^{k-1}}, v_j^{2^{k-1}, 2^{k-1}}) + 2^{k-1} - 1 + 2^k - 1 - i = d(v_0^{0,0}, v_j^{2^{k-1}}) + 2^k - 1 - 2i \leq d(v_0^{0,0}, v_j^{i,i}) + 2^k - 3$ 이 성립한다. 따라서 조건 (a), (b)를 만족한다. P_3 의 길이는 $1 + \text{dia}(G_{0,0}) + i + 2^{k-1} - 1 \leq \text{dia}(G)$

이하이다. P_4 의 길이는 $1 + \text{dia}(G_{0,0}) + 2^{k-1} - 1 + 2^k - 1 - i \leq \text{dia}(G) + 2^{k-1} - i \leq \text{dia}(G) + 2^{k-1} - 1$ 이하이다. 나머지 조건도 만족함을 쉽게 알 수 있다. $j+1=0$ 인 경우도 다섯 조건을 모두 만족함을 보일 수 있다. \square

지금까지 위의 여섯 경우를 통해서 w 가 $i \leq 2^{k-1} - 1$ 이거나 혹은 $i = 2^{k-1}$ 이고 $0 \leq i' \leq 2^{k-1} - 1$ 인 조건을 만족하는 $G_{i,i'}$ 에 속한 경우에 서로소인 경로를 설계하였다. 이제 나머지 경우는 이미 다른 경우와 대칭적임을 관찰함으로써 아래 정리 1의 증명을 완성할 수 있다. w 가 $i = 2^{k-1}$, $2^{k-1} \leq i' \leq 2^k - 1$ 인 $G_{i,i'}$ 에 속한 경우는 $G_{i,2^k-1-i'}$ 에 속한 경우와 대칭이고, w 가 G_j , $2^{k-1} + 1 \leq i \leq 2^k - 1$ 에 속하는 경우는 G_{2^k-i} 에 속한 경우와 대칭이다.

정리 1 $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 2$ 에 있는 서로 다른 두 노드 사이에 앞의 다섯 조건을 모두 만족하는 $\delta(G)$ 개의 서로소인 경로가 존재한다.

위 정리에 의하면 $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 2$ 에 있는 서로 다른 두 노드 v, w 사이에 $\Delta_1 = 2^k - 1$ 이고 $\Delta_2 = 2^{k-1}$ 인 경로가 존재한다는 것이다. 특히 $m = k+1$ 인 경우, 즉 $G(2^{k+1}, 2^k)$, $k \geq 2$ 에서는 정점 v_0 과 v_1 과 사이에 있는 $\delta(G) = 3$ 개의 서로소인 경로는 반드시 길이가 2^k 이상인 경로를 포함함을 보일 수 있다. 그 증명은 어렵지 않으므로 생략한다. 따라서 $m = k+1$ 인 경우는 이 논문에서 제시한 Δ_1, Δ_2 값이 최적이며, 따라서 모든 $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 2$ 에 대해서 성립하기 위한 Δ_1, Δ_2 은 제시한 값이 최적이다. $G(2^m, 4)$ 에 있는 임의의 두 노드 사이에 길이가 $d(v, w) + 3$ 이하인 서로소인 경로가 존재한다. 그런데, $G(2^m, 4)$ 과 정점과 에지 수가 같은 하이퍼큐브 Q_m 에서는 Δ_1 이 2임이 밝혀져 있다[11].

따름정리 1 $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 2$ 의 고장 지름은 $\text{dia}(G) + 2^{k-1}$ 이하이며, persistence는 $\lfloor \delta(G)/2 \rfloor$ 이상이다.

$G(2^m, 4)$ 의 고장 지름은 위의 따름정리에 의하면 $\text{dia}(G) + 2 = \lceil (3m-1)/4 \rceil + 2$ 이하라고 말하는 것이지만, [1]에서 $m \geq 5$ 인 경우에 고장 지름이 $\lceil (3m-1)/4 \rceil + 1$ 이하임을 증명하였다. 그런데, 하이퍼큐브 Q_m 의 고장 지름은 $m+1$ 이라고 알려져 있다[8].

4 $G(2^m, 2)$ 의 서로소인 경로

이제 $G(2^m, 2)$ 의 서로소인 경로를 고려한다. $G(2^m, 2)$ 의 분지수 $\delta(G) = 2m - 1$ 이

고 지름 $\text{dia}(G) = \lceil m/2 \rceil$ 이다. 지름에 관하여 $\text{dia}(G) = \text{dia}(G_{0,0}) + 1$ 이고, m 이 홀수이면 $\text{dia}(G) = \text{dia}(G_0) + 1$, 짝수이면 $\text{dia}(G) = \text{dia}(G_0)$ 이 성립한다. 3 절에서와 유사하게 임의의 두 노드 v, w 사이에 아래의 다섯 조건을 모두 만족하는 서로소인 경로를 재귀적으로 설계한다.

- (a) 모든 서로소인 경로의 길이는 $d(v, w) + 3$ 이하이다.
- (b) 최소한 한 경로는 길이 $d(v, w)$ 인 최단 경로이다. 특히 v 와 w 가 인접하지 않으면 최단 경로가 둘 이상 존재한다.
- (c) 모든 서로소인 경로의 길이는 $\text{dia}(G) + 2$ 이하이다.
- (d) 최소한 $\lceil \delta(G)/4 \rceil$ 개의 경로의 길이는 $\text{dia}(G)$ 이하이다. 특히 m 이 홀수일 때는 길이가 $\text{dia}(G)$ 이하인 $\lceil (\delta(G)+2)/4 \rceil$ 개 이상의 경로가 존재한다.
- (e) 최소한 $\lceil (3\delta(G)-1)/4 \rceil$ 개의 경로의 길이는 $\text{dia}(G) + 1$ 이하이다. 특히 m 이 홀수일 때는 길이가 $\text{dia}(G) + 1$ 이하인 $\lceil (3\delta(G)+5)/4 \rceil$ 개 이상의 경로가 존재한다.

먼저 $2 \leq m \leq 3$ 인 경우 위의 조건을 만족하는 설계가 있음을 보이고, 이를 이용하여 $m \geq 4$ 인 경우에 재귀적으로 설계한다.

보조정리 11 $G(2^m, 2)$, $2 \leq m \leq 3$ 은 위의 다섯 조건을 모두 만족하는 서로소인 경로가 $\delta(G)$ 개 존재한다.

증명 우선 $m = 2$ 일 때는 $G(2^m, 2)$ 가 완전 그래프이므로 길이가 2 이하인 서로소인 경로를 $\delta(G)$ 개 가지므로 당연히 성립한다. $m = 3$ 일 때는 $\delta(G) = 5$ 이고 $\text{dia}(G) = 2$ 이다. 임의의 노드 쌍 v, w 에 대해서 서로소인 경로를 설계해야 하지만, 재귀원형군이 노드 대칭적이므로 $v = v_0, w = v_j, 1 \leq j \leq 4$ 임을 가정하여도 충분하다. 아래에 서로소인 경로를 제시한다.

$$w = v_1: v_0 - v_1; v_0 - v_2 - v_1; v_0 - v_7 - v_1; v_0 - v_6 - v_5 - v_1; v_0 - v_4 - v_3 - v_1;$$

$$w = v_2: v_0 - v_2; v_0 - v_1 - v_2; v_0 - v_4 - v_2; v_0 - v_6 - v_2; v_0 - v_7 - v_3 - v_2;$$

$$w = v_3: v_0 - v_1 - v_3; v_0 - v_2 - v_3; v_0 - v_4 - v_3; v_0 - v_7 - v_3; v_0 - v_6 - v_5 - v_3;$$

$$w = v_4: v_0 - v_4; v_0 - v_2 - v_4; v_0 - v_6 - v_4; v_0 - v_1 - v_3 - v_4; v_0 - v_7 - v_5 - v_4;$$

위에 제시된 경로가 서로소임과 최단 경로를 포함하고 있음은 쉽게 알 수 있다. $w = v_3$ 일 때는 v 와 w 가 인접하지 않고 최단 경로가 둘 이상이다. 그리고 제시된 경로 중에 최대 길이는 3이므로 조건 (a), (c), (e)를 만족하고, 또한 지름 이하인 경로가 3개 이상이므로 조건 (d)도 만족한다. \square

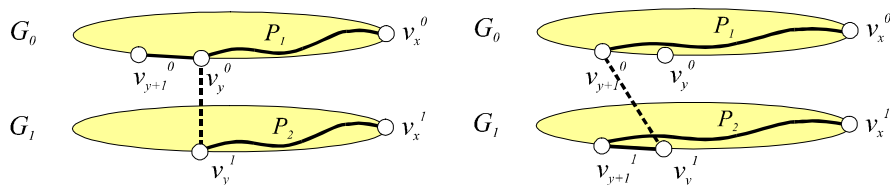
$G(2^m, 2)$ 도 재귀적 구조를 가지지만 $G(2^m, 2^k)$, $k \geq 2$ 와는 달리 G_0 에 속하지 않으

면서 v_0^l 에 인접한 두 정점이 모두 G_1 에 속한다. 앞 절에서와 달리 재귀적으로 설계하기 위하여 어떤 G_i 에 속하는 두 정점 $\{v_a^i, v_{a+1}^i\}$ 와 다른 두 정점 $\{v_b^i, v_{b+1}^i\}$ 을 잇는 두 개의 (양끝 정점을 포함하여) 정점이 서로소인 경로의 길이에 대한 성질을 아래 보조정리에서 제시하고 이를 이용하기로 한다. 두 노드 v 와 w 를 잇는 경로를 간략히 $v-w$ 경로라고 표기하기로 한다.

보조정리 12 $G(2^m, 2)$ 는 $\{v_a, v_{a+1}\}$ 과 $\{v_b, v_{b+1}\}$ 사이에 길이가 $d(v_a, v_b)$ 이하인 두개의 서로소인 경로를 가진다. 그 경로는 v_a-v_b 경로와 $v_{a+1}-v_{b+1}$ 경로이거나, 혹은 v_a-v_{b+1} 경로와 $v_{a+1}-v_b$ 경로이며, 경로의 길이가 0일 수도 있다.

증명 $G(2^m, 2)$ 의 재귀적 구조를 이용하여 m 에 대한 귀납법으로 증명한다. $m \leq 2$ 인 경우는 $G(2^m, 2)$ 가 완전 그래프가 되므로 성립한다. $G(2^m, 2)$ 가 노드 대칭적이므로 v_a 는 G_0 에 속하고, $v_a = v_x^0$ 이라고 가정한다. v_b 가 G_0 에 속하는 경우와 G_1 에 속하는 두 경우로 나누어 증명한다. 먼저 v_b 가 G_0 에 속하는 경우, 즉 $v_b = v_y^0$ 인 경우를 생각한다. 이 때 $v_{a+1} = v_x^1$, $v_{b+1} = v_y^1$ 이 된다. G_0 에서 v_x^0 와 v_y^0 을 잇는 최단 경로를 P_1 이라고 하고, G_1 에 있는 P_1 의 사촌 경로를 P_2 라고 하면 P_2 는 v_x^1 와 v_y^1 을 잇는 최단 경로가 된다. 이 두 경로는 위의 조건을 만족한다.

이제 $v_b = v_y^1$ 인 경우를 고려한다. 이 때 $v_{a+1} = v_x^1$ 이고 $v_{b+1} = v_{y+1}^0$ 가 된다. v_y^0 나 혹은 v_{y+1}^0 을 지나는 v_x^0 에서 v_y^1 까지의 최단 경로가 존재한다. 먼저 최단 경로가 v_y^0 을 지나는 경우를 먼저 생각한다(그림 9 (a) 참조). 이 때 $d(v_x^0, v_y^1) = d(v_x^0, v_y^0) + 1$ 이다. v_x^0 에서 v_y^0 까지의 최단 경로를 연장하여 v_{y+1}^0 에 도달하는 경로를 P_1 이라고 하고, G_1 에 있는 P_1 의 사촌 경로에서 맨 끝 정점 v_{y+1}^1 을 제거하여 얻은 v_x^1 에서 v_y^1 까지의 경로를 P_2 라고 한다. 두 경로의 길이는 모두 $d(v_x^0, v_y^1)$ 이하가 된다. 이제 남은 경우인 v_x^0 에서 v_y^1 까지의 최단 경로가 v_{y+1}^0 을 지나는 경우이다(그림 9 (b) 참조). 이 때 $d(v_x^0, v_y^1) = d(v_x^0, v_{y+1}^0) + 1$ 이다. v_x^0 에서 v_{y+1}^0 까지의 최단 경로에서 마지막 노드 v_{y+1}^0 를 제거하여 v_y^0 까지의 경로 P_1 을 얻는다. G_1 에 있는 P_1 의 사촌 경로를 v_y^1 까지 연장하여 경로 P_2 를 얻는다. 이 경우에도 두 경로는 모두 길이 조건을 만족한다. \square



(a) (b)

그림 9 보조정리 12 증명의 설명

이제 $m \geq 4$ 일 때 서로소인 경로를 재귀적으로 설계하고, 이 경로가 위의 다섯 조건을 모두 만족함을 보인다. w 가 어떤 G_j 에 속하느냐에 따라 아래와 세 경우로 나눈다. 재귀형군이 노드 대칭적이므로 일반성을 잃지 않고 $v = v_0^0$ 임을 가정한다.

경우 1 $w = v_j^0$

이 경우 $j \neq 0$ 이다. G_0 상에서 위의 조건을 만족하는 $\delta(G) - 2$ 개의 서로소인 경로를 설계한다(그림 10 참조). 보조정리 12에 의해서 v_0^0 에 인접하고 G_1 상의 두 정점 $\{v_{2^{m-1}-1}^1, v_0^1\}$ 과 v_j^0 에 인접한 두 정점 $\{v_{j-1}^1, v_j^1\}$ 사이에 길이 $d(v_{2^{m-1}-1}^1, v_{j-1}^1) = d(v_0^0, v_j^0)$ 이하인 두 개의 서로소인 경로가 존재한다. 이 두 경로 각각의 끝 정점을 확장하면 v_0^0 와 v_j^0 을 잇는 경로가 되는데 이를 P_1, P_2 라고 하자. 이 두 경로의 길이는 $d(v_0^0, v_j^0) + 2$ 이하이다.

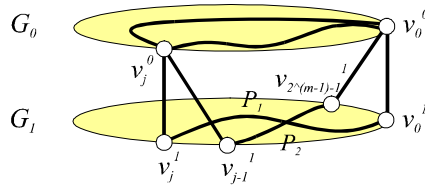


그림 10 경우 1의 설명

보조정리 13 경우 1에서 설계한 경로는 다섯 조건을 모두 만족한다.

증명 조건 (a), (b)를 만족함은 쉽게 알 수 있다. 나머지 조건을 만족하는지는 m 이 홀수인 경우를 먼저 생각한다. 이 경우 $\text{dia}(G) = \text{dia}(G_0) + 1$ 이 성립한다. 재귀적으로 설계한 경로의 길이는 $\text{dia}(G_0) + 2 = \text{dia}(G) + 1$ 이하이고, 경로 P_1, P_2 의 길이도 $\text{dia}(G_0) + 2 = \text{dia}(G) + 1$ 이하이다. 이제 조건 (d)만 만족함을 보이면 되는데, 재귀적으로 설계한 경로에 길이 $\text{dia}(G_0) + 1$ 이하인 경로가 $\lceil (3(\delta(G) - 2) - 1)/4 \rceil$ 개 이상 존재하는데, 이 개수는 $\delta(G) \geq 7$ 이므로 $\lceil (\delta(G) + 2)/4 \rceil$ 이상이다.

이제 m 이 짝수인 경우를 고려하는데, 이 경우 $\text{dia}(G) = \text{dia}(G_0)$ 임에 유의한다. 재귀적으로 설계한 경로의 길이는 $\text{dia}(G_0) + 2 = \text{dia}(G) + 2$ 이하이고, 경로 P_1, P_2 의 길이도 $\text{dia}(G_0) + 2 = \text{dia}(G) + 2$ 이하이다. 재귀적으로 설계한 경로에는 길이 $\text{dia}(G_0)$

이하인 것이 $\lceil ((\delta(G)-2)+2)/4 \rceil = \lceil \delta(G)/4 \rceil$ 개 존재하고, 길이 $\text{dia}(G_0) + 1$ 이하인 것이 $\lceil (3(\delta(G)-2)+5)/4 \rceil = \lceil (3\delta(G)-1)/4 \rceil$ 개 존재하므로 증명이 완성된다. \square

남은 경우는 w 가 G_1 에 속하는 경우이다. G_0, G_1 의 재귀적 구조를 이용하여 서로소인 경로를 설계하기로 하고, $v = v_0^{0,0}$ 라고 가정한다.

경우 2 $w = v_j^{1,0}, j \neq 0$

$v_0^{0,0}$ 와 $v_j^{1,0}$ 사이에 $v_j^{0,0}$ 를 지나는 최단 경로가 존재한다. $G_{0,0}$ 상에서 $v_0^{0,0}$ 와 $v_j^{0,0}$ 을 잇는 $\delta(G) - 4$ 개의 서로소인 경로를 재귀적으로 설계한다(그림 11 참조). 이 경로들 중 최단 경로를 연장하여 $v_j^{1,0}$ 에 도달하도록 한다. 나머지 경로는 $v_j^{0,0}$ 에 도달하기 직전에 $v_{s_t}^{0,0}, 1 \leq t \leq \delta(G) - 5$ 를 지난다고 하자. 각 경로는 $v_{s_t}^{0,0}$ 를 지난 다음 $v_{s_t}^{1,0}$ 를 거쳐 $v_j^{0,0}$ 에 도달한다. 이들 경로의 길이는 1만큼 늘어났다. 경로 P_1 은 $v_0^{0,0}$ 에서 출발하여 $v_0^{1,0}$ 를 거쳐 $G_{0,0}$ 상에서 $v_0^{0,0}$ 와 $v_j^{0,0}$ 을 잇는 최단 경로의 사촌 경로를 따라 $v_j^{0,0}$ 에 도달한다. P_2 와 P_3 는 $G_{0,1}$ 에 있는 $v_0^{0,0}$ 에 인접한 두 정점 $\{v_{2^{m-2}-1}^{0,1}, v_0^{0,1}\}$ 와 $\{v_{j-1}^{0,1}, v_j^{0,1}\}$ 을 잇는 두 서로소인 경로를 각각 지난 후, $v_j^{0,1}$ 에 도달한 경로 P_2 는 직접 $v_j^{1,0}$ 에 도달하고, $v_j^{0,1}$ 에 도달한 경로는 $v_{j-1}^{1,0}$ 을 거쳐 $v_j^{1,0}$ 에 도달한다. P_4 는 $v_0^{0,0}$ 에서 $v_{2^{m-2}-1}^{0,1}$ 에 도달한 다음 $v_{j-1}^{1,0}$ 을 지나지 않는 최단 경로로 $v_{j-1}^{1,0}$ 를 거쳐 $v_j^{1,0}$ 에 도달한다. $v_{2^{m-2}-1}^{0,1}$ 와 $v_{j-1}^{1,0}$ 을 잇는 최단 경로로서 $v_{j-1}^{1,0}$ 을 지나지 않는 경로가 존재한다는 것이 보장되는 것은 $G_{1,1}$ 이 조건 (b)를 만족하므로 $v_{2^{m-2}-1}^{0,1}$ 과 $v_{j-1}^{1,0}$ 가 인접하거나 혹은 인접하지 않는 경우는 최단 경로가 둘 이상 존재하기 때문이다.

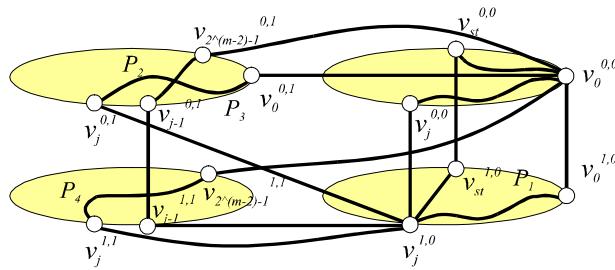


그림 11 경우 2의 설명

보조정리 14 경우 2에서 설계한 경로는 다섯 조건을 모두 만족한다.

증명 P_1 은 최단 경로가 된다. P_2 와 P_3 에 대해서는 $G_{0,1}$ 에서 설계한 두 서로소인 경로

의 길이가 $d(v_0^{0,1}, v_j^{0,1})$ 이하이므로, P_2 의 길이는 $1 + d(v_0^{0,1}, v_j^{0,1}) + 1 = d(v_0^{0,0}, v_j^{0,0}) + 1$ 이하이고, P_3 의 길이는 $1 + d(v_0^{0,1}, v_j^{0,1}) + 2 = d(v_0^{0,0}, v_j^{0,0}) + 2$ 이하이다. P_4 의 길이는 $1 + 1 + d(v_0^{0,1}, v_j^{0,1}) + 1 = d(v_0^{0,0}, v_j^{0,0}) + 2$ 이하이다. 따라서 재귀적으로 설계한 경로를 포함하여 조건 (a), (b)를 만족함을 쉽게 알 수 있다. 나머지 조건을 만족하는지 알아보기 위해서 P_2 와 P_4 의 길이를 다시 생각하면 $1 + \text{dia}(G_{0,0}) + 1 = \text{dia}(G) + 1$ 이하이며 P_3 의 길이는 $\text{dia}(G) + 2$ 이하이다. 따라서 조건 (c)을 만족하며, 네 경로 P_1, P_2, P_3, P_4 에서 $\text{dia}(G)$ 이하인 경로가 하나 있으므로 조건 (d)을 만족하며, $\text{dia}(G) + 1$ 이하인 경로가 셋이므로 조건 (e)도 만족한다. \square

경우 3 $w = v_0^{1,0}$

$G_{0,0}$ 에서 $v_0^{0,0}$ 에 인접한 정점을 $v_{s_t}^{0,0}$, $1 \leq t \leq \delta(G) - 4$ 라고 하자. 이들 중 $s_t = 1$ 인 경우를 제외하고 $v_0^{0,0}$ 에서 출발하여 $v_{s_t}^{0,0}$, $v_{s_t}^{1,0}$ 을 거쳐 $v_0^{1,0}$ 에 도달하는 길이 3인 경로 $\delta(G) - 5$ 개를 설계한다(그림 12 참조). 이제 남은 다섯 경로를 제시하고자 한다. 경로 P_1 은 직접 $v_0^{0,0}$ 와 $v_0^{1,0}$ 을 잇는 최단 경로이다. P_2 는 $v_0^{0,0}$, $v_0^{0,1}$, $v_0^{1,0}$ 을 차례로 지나는 길이 2인 경로이고, P_3 는 $v_0^{0,0}$, $v_{2^{m-2}-1}^{0,1}$, $v_0^{1,0}$ 을 지나는 길이 2인 경로이다. P_4 는 $v_0^{0,0}$, $v_{2^{m-2}-1}^{0,1}$, $v_1^{0,1}$, $v_1^{1,0}$, $v_0^{1,0}$ 인 길이 4인 경로이며, P_5 는 $v_0^{0,0}$, $v_1^{0,0}$, $v_1^{1,0}$, $v_0^{1,0}$ 인 길이 3인 경로이다.

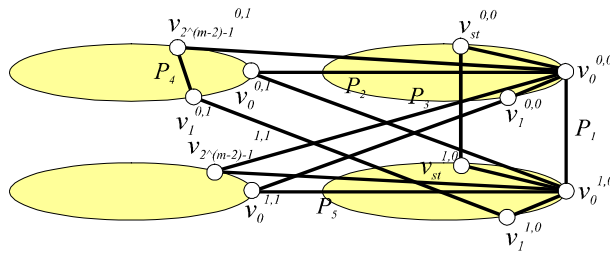


그림 12 경우 3의 설명

보조정리 15 경우 3에서 설계한 경로는 다섯 조건을 모두 만족한다.

증명 P_1 은 최단 경로이다. $d(v_0^{0,0}, v_0^{1,0}) = 1$ 이지만, 모든 경로의 길이가 4 이하이므로 조건 (a), (b)를 만족한다. $m \geq 4$ 인 경우를 다루고 있으므로 $\text{dia}(G) \geq 2$ 이다. 모든 경로의 길이는 4 이하이므로 조건 (c)를 만족하고, P_4 를 제외한 경로의 길이는 3 이하이므로 조건 (e)도 만족한다. 조건 (d)를 만족하는지를 알아보기 위해서 $m = 4$ 인 경우를 먼저 고려한다. 이 경우는 $\delta(G) = 7$ 이므로 길이가 $\text{dia}(G)$ 이하인 경로가 $\lceil 7/4 \rceil = 2$ 개 이상 존

재하면 되는데, P_1 과 P_2 가 있어서 이 조건을 만족한다. $m \geq 5$ 인 경우는 $\text{dia}(G) \geq 3$ 이므로 P_4 를 제외한 모든 경로의 길이가 $\text{dia}(G)$ 이하가 된다. \square

지금까지 w 가 G_0 에 속하거나 $G_{1,0}$ 에 속한 경우에 서로소인 경로를 설계하였다. w 가 $G_{1,1}$ 에 속하는 경우는 $G_{1,0}$ 에 속하는 경우와 대칭적이므로 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

정리 2 $G(2^m, 2)$, $m \geq 2$ 에 있는 임의의 서로 다른 노드 v, w 사이에 위의 다섯 조건을 만족하는 $\delta(G)$ 개의 서로소인 경로가 존재한다.

$G(2^m, 2)$, $m \geq 4$ 에서 v_0 와 v_1 사이에 $\delta(G)$ 개의 서로소인 경로에는 항상 길이 4 이상인 경로가 포함됨을 보일 수 있다. 이 증명은 어렵지 않으므로 여기서는 생략한다. 따라서 임의의 노드 쌍을 잇는 서로소인 경로를 생각하면 Δ_1 이 3이라는 것은 최적이다. Δ_2 에 관해서는 $G(2^3, 2)$ 에서는 $\Delta_2 = 1$ 이고, $G(2^4, 2)$ 에서는 $\Delta_2 = 2$ 이지만, $G(2^5, 4)$ 에서 $\Delta_2 = 1$ 이다.

따름정리 2 $G(2^m, 2)$, $m \geq 2$ 의 고장 지름은 $\text{dia}(G) + 2$ 이하이며, persistence는 $\lceil \delta(G)/4 \rceil$ 이상이다.

5 결론

이 논문에서는 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 의 서로 다른 두 정점 v, w 사이에 길이가 제한된 서로소인 경로를 재귀적으로 설계할 수 있음을 보였다. $k \geq 2$ 인 경우는 그 길이가 $d(v, w) + 2^k - 1$ 이하임과 동시에 $\text{dia}(G) + 2^{k-1}$ 이하임을 보였고, $k = 2$ 인 경우는 $d(v, w) + 3$ 과 $\text{dia}(G) + 2$ 이하임을 보였다. 이 결과를 이용하여 $G(2^m, 2^k)$ 에서 고장 지름의 상한값과 persistence의 하한값을 제시하였고, 이 결과는 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$ 에서 고장 감내 라우팅 알고리즘을 설계할 때 이용할 수 있다.

$G(2^m, 2^k)$ 의 persistence는 이 논문에서 분석된 것보다 크게 개선될 가능성이 있다. 왜냐하면 이 논문에서는 $\delta(G)$ 개의 서로소인 경로를 제시하고 그 중에 길이가 지름 이하인 것을 계산한 것인데, 실제 persistence를 분석하기 위해서 $\delta(G)$ 개의 서로소인 경로가 존재해야 한다는 조건을 만족할 필요가 없기 때문이다. 또한 길이가 $\text{dia}(G) + 1$ 이하인 경로가 약 $3\delta(G)/4$ 개 이상 있다고 보였는데, 이들 중 상당수의 길이가 실제 $\text{dia}(G)$ 이하일 가능성이 있다.

참고문헌

- [1] 김 희철, 김 상범, 좌 경룡, “재귀원형군의 고장 지름,” *한국정보과학회 가을 학술발표회* **21(2)**, pp. 663-666, 1994.
- [2] 박 정흠, 좌 경룡, “재귀원형군의 위상 특성: 서로소인 사이클과 그래프 invariant,” *한국정보과학회 논문지* **26(8)**, 1999.
- [3] 정 성우, 김 숙연, 박 정흠, 좌 경룡, “Recursive circulant 그래프의 연결도,” *한국정보과학회 봄 학술발표회* **19(1)**, pp. 591-594, 1992.
- [4] F. T. Boesch, F. Harary, and J. A. Kabell, “Graphs as models of communication network vulnerability: connectivity and persistence,” *Networks* **11**, pp. 57-63, 1981.
- [5] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, 5th printing, American Elsevier Publishing Co., Inc., 1976.
- [6] G. Exoo, “On a measure of communication network vulnerability,” *Networks* **12**, pp. 405-409, 1982.
- [7] M. Hamdi, “Topological properties of the directional hypercube,” *Information Processing Letters* **53**, pp. 277-286, 1995.
- [8] M. S. Krishnamoorthy and B. Krishnamurthy, “Fault diameter of interconnection networks,” *Comput. Math. Applic.* **13(5/6)**, pp. 577-582, 1987.
- [9] J.-H. Park and K.-Y. Chwa, “Recursive circulant: a new topology for multicomputer networks,” in Proc. *International Symposium on Parallel Architectures, Algorithms and Networks ISPAN'94*, Kanazawa, Japan, pp. 73-80, 1994.
- [10] D. A. Reed and R. M. Fujimoto, *Multicomputer Networks: Message-Based Parallel Processing*, The MIT Press, 1987.
- [11] Y. Saad and M. H. Schultz, “Topological properties of hypercubes,” *IEEE Trans. Comput.* **37**, pp. 867-872, 1988.